Global J. of Engng. Educ., Vol.10, No.3
Published in Australia

Die Nutzung des Computersystems *Maple* in der Ingenieurausbildung der Universität Debrecen

Imre Kocsis
Zsolt Tiba
Faculty of Technical Engineering, University of Debrecen, Ótemetõ u. 2-4, H-4028 Debrecen, Ungarn
Gabriele Sauerbier
Hochschule Wismar - University of Technology, Business and Design
Philipp-Müller-Straße 21, D-23952 Wismar, Deutschland

In der Ingenieurmathematikausbildung an der Universität Debrecen in Debrecen, Ungarn, wird seit einigen Jahren das Computeralgebrasystem *Maple* erfolgreich zur Lehre der Differenzialgleichungen eingesetzt. Im Artikel werden drei Beispiele aus dem Studiengang Maschinenbau vorgestellt.

EINFÜHRUNG

Im Hintergrund technischer Probleme stehen im Allgemeinen die Differenzialgleichungen. Um die technischen Fächer richtig durchführen zu können, müssen die Studenten den Begriff der Lösung einer Differenzialgleichung kennen, sowie über die Funktion des Parameters und der Anfangswerte Bescheid wissen.

Die verfügbare Zeit in der Grundlagenausbildung reicht zum Studium der Theorie der Differenzialgleichungen nicht aus. Inzwischen stellt die Informatik eine Reihe von Möglichkeiten zur Verfügung. Davon können Methoden ausgewählt werden, die zum Verständnis der im Zusammenhang mit den Differenzialgleichungen auftretenden Begriffe beitragen. Die Animation ist zu diesem Zweck besonders geeignet [1].

In der Mathematik- und der Ingenieurausbildung der Universität Debrecen wird das System *Maple* vielfältig eingesetzt. *Maple* bietet Möglichkeiten zur Darstellung der Begriffe der mathematischen Analysis, besonders anschaulich sind die dem Studium der Differenzialgleichungen dienenden Mittel.

In diesem Artikel zeigen wir an einigen aus vereinfachten technischen Problemen hervorgehenden Beispielen, wie analysiert werden kann, wie der Wert eines gegebenen physikalischen Parameters den Lauf des Systems beeinflusst.

Im ersten Beispiel kann man deutlich erkennen, dass im Systemlauf eine kritische Situation auftreten kann. Die Belastung der Komponenten kann die durch die Festigkeitsberechnung vorgegebene Grenze überschreiten, das kann bis zur Zerstörung des Konstruktionselementes führen.

WÄHREND DES MASCHINEN-BETRIEBES ENTSTEHENDE RESONANZ

Einer der wichtigsten Gesichtspunkte bei der Konstruktion von Maschinen, die bewegliche, drehende Konstruktionselemente enthalten, ist die Beachtung der während des Betriebes dieser Maschine auftretenden Resonanzgeschehnisse. Infolgedessen spielt die Analyse der auf die Maschinenelemente während des Betriebes wirkenden, sich dynamisch verändernden Belastungen eine wichtige Rolle in der Maschinenbau-Ausbildung. Die Studenten müssen verstehen, dass ein auf Grund der statischen Belastung konstruiertes Maschinenelement während des Betriebes unter Überbelastung geraten kann, zum Beispiel wenn Resonanz auftritt.

In der Festigkeitsberechnung sind sogar nur das genaueste Belastungsmodell und die sorgfältigste Berechnung für ein *sich nur statisch verhaltendes* Konstruktionselement gültig [2]. Wie allgemein bekannt ist, besitzt jede Konstruktion, sogar der menschliche Körper eine Eigenfrequenz. Die Eigenfrequenzen können in einfachen Fällen sehr einfach berechnet oder gemessen werden. Ein gutes Beispiel dafür ist eine mit Konsolen eingespannte Blattfeder.

Beim Belastungsmodell gilt der Zusammenhang $T(t) = T_n + T_a \sin(\omega t)$. Hier ist ω die Kreisfrequenz der Belastung, deren Wert im Falle einer mit Elektromotor angetriebenen Antriebskette bekannt ist. Aber in vielen Fällen ist ω als anregende Frequenz stochastisch [3]. Ein gutes Beispiel dafür ist die Frequenz der Windstöße gegen Brückenkonstruktionen. T_n ist die aus der nominalen Leistung gegebene nominale Belastung, T_a ist die Belastungsamplitude, die durch den Betriebsfaktor bestimmt werden kann. Der Betriebsfaktor bezeichnet Betriebsverhältnisse der Antriebskette. In dem Fall, wenn die Eigenkreisfrequenz α des Gerüsts und die Anregungskreisfrequenz ω gleich sind oder ungefähr gleich, kann Resonanz auftreten. In diesem Fall wird, wie bei jedem federigen Element, Energie im Gerüst gespeichert und angehäuft. Wenn genügend Zeit zur Verfügung steht, dann wird es mit immer größer werdender Amplitude schwingen bzw. schwanken und zwar solange, bis im kritischen Querschnitt der Bruch eintritt. Natürlich gibt es solche Anlagen, z.B. Vibratoren, Schwingungsgeräte, bei denen die Erregerfrequenz auf die Eigenfrequenz des Gerätes abgestimmt wird, aber im allgemeinen Fall soll die Resonanz vermieden werden.

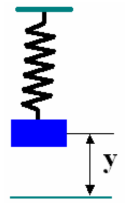
Die Resonanz kann man also nur verhindern, wenn man die Erregerfrequenz und die Eigenfrequenz des Systems weit voneinander weg einstellt. Da im Allgemeinen die Erregerfrequenzen gegeben sind, besteht die Lösung normalerweise in der Verstellung der Eigenfrequenz [4].

Das Problem ist vorstellbar an einem ganz einfachen, bekannten Beispiel, dem Feder-Masse-System. Auf eine an einer Feder befestigte Masse wirkt eine sich periodisch ändernde Kraft. Bei der Festigkeitsberechnung der Feder muss die sich in der Feder herausbildende, maximale Kraft berücksichtigt werden, die mit der Zugdehnung der Feder, also der Auslenkung der an der Feder befestigten Masse zusammenhängt. Das System bleibt betriebsfähig, wenn die während des Betriebes auftretende, maximale Auslenkung diesen Wert nicht überschreitet.

Wegen der möglichen Resonanz ist der Wert der Betriebskreisfrequenz ω determiniert. Bei gegebener Federsteifigkeit und Masse bilden sich abhängig vom Wert der Betriebskreisfrequenz ω verschiedene Bewegungsabläufe heraus. Daher muss die Feder verschiedene Kraftangriffe entfalten. In dem Fall, wenn sich die Erregerfrequenz der Eigenfrequenz des Systems nähert, kann der Amplitudewert der sich herausbildenden Bewegung den zum normalen Betriebsverhältnis gehörigen Amplitudewert überschreiten.

Die folgende Differenzialgleichung beschreibt die Bewegung der erzwungenen Schwingung:

$$y''(t) + \frac{d}{m} y(t) = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$



y – Auslenkung (m)
d – Federsteifigkeit (N/m)
m – Masse (kg)
F_0 – Maximale anregende Kraft (N)
ω – Erregerkreisfrequenz (1/s)

Simulation mit Hilfe von *Maple*

Das System *Maple* ermöglicht es, die mit der Veränderung eines Parameters entstehenden Funktionskurven filmartig durchzugehen. Diese Methode ist nützlich zur Analyse der Differenzialgleichungen. Verändert man einen Parameter der Differenzialgleichung in einem bestimmten Bereich und in einer bestimmten Schrittweite, so kann man die Veränderungen der Lösungskurven in *Maple* unmittelbar visualisieren und entsprechend diskutieren [5].

Im gegebenen Beispiel ist visuell analysierbar, bei welchen Werten des Parameters Erregerkreisfrequenz ù eine größere Auslenkung als die maximal zulässige Amplitude vorkommen kann. In den Bildern sind die Bewegungskurven für die Erregerkreisfrequenzen ω=70, ω=82, ω=92, ω=96 und ω=100 (alle Frequenzen in 1/s) dargestellt. Die Werte der anderen Parameter d=10000N/m, m=1kg, F_0=20N wurden nicht geändert. Die maximal zulässige Amplitude ist in den einzelnen Graphiken in Abbildung 1 extra hervorgehoben.

Aufgrund der Animation ist es verständlich, dass ein solcher Parameter, der sich nicht aus der Geometrie des konstruierten Mechanismus, also aus den physischen Charakteristika ergibt, sondern der sich während des Betriebes herausbildet (zum Beispiel durch den Einfluss eines rotierenden Konstruktionselementes), die Bewegung gründlich verändern kann und demzufolge großen Einfluss auf die Belastung der Konstruktionselemente hat.

DIE BIEGELINIE EINER AN EINEM ENDE BEFESTIGTEN FLACHFEDER

Eine Flachfeder mit einer angenommenen Länge 1 biegt sich unter der Wirkung einer Kraft F nieder, und deformiert sich federnd. Zur Beschreibung der federnden Verformung kann die folgende Formel benutzt werden:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{I \cdot E}$$

wobei M die Biegemomentfunktion, E der Elastizitätsmodul, I der Querschnittskoeffizient und ρ der Krümmungsradius sind. Es sei $y(x)$ die Biegelinie der Feder. Dann gilt:

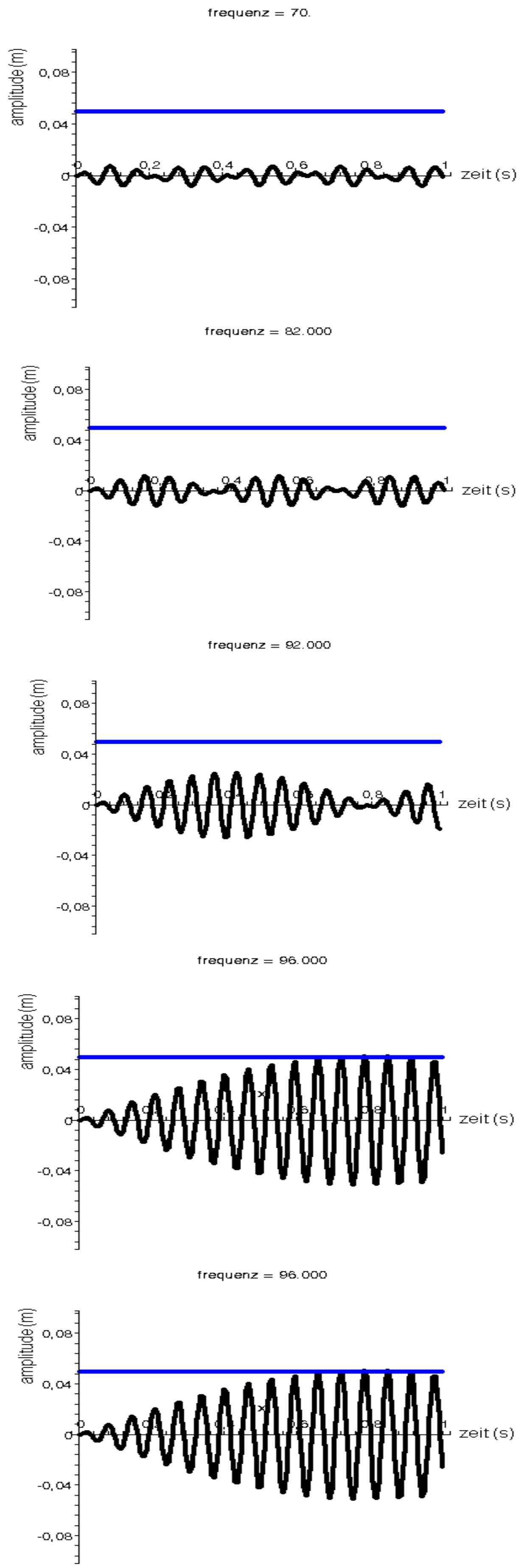


Abbildung 1: Die maximal zulässige Amplituden.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''(x)}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Mit $y' \approx 0$ erhält man

$$y''(x) = \frac{M(x)}{I \cdot E}$$

Es gibt mehrere Methoden für die Modifikation der funktionalen Eigenheiten der Flachfeder:

- Wechsel des Materials der Feder;
- Wechsel der geometrischen Abmessungen der Feder;
- Wechsel der funktionierenden Länge der Feder.

Falls die Gestalt der deformierten Feder, also die Biegelinie bekannt ist, kann die Charakteristik der Feder mit Hilfe einer zweckmäßig geformten Unterlage modifiziert werden. Die lineare Charakteristik kann progressiv gemacht werden.

Simulation mit Hilfe von *Maple*

Mit der *Maple* Animation kann die Biegelinie dargestellt werden. Wenn an einem Ende der Flachfeder der Länge *L* die Kraft *F* wirkt, dann ist die Biegemomentsfunktion:

$$M(x) = F \cdot (L - x)$$

Daraus folgt die Differenzialgleichung der Biegelinie:

$$y''(x) = \frac{F}{I \cdot E}(L - x)$$

In den Bildern in Abbildung 2 sind die Biegelinien für die Kräfte F=0, F=1, F=3, F=6 und F=10 (alle Kräfte in N) dargestellt. Die Werte der anderen Parameter $E=10^{11}$Pa, $I=10^{-9}$m^3, L=1m wurden nicht geändert.

DIE VERFORMUNG EINER WELLE DURCH EINE DREHENDE UNAUSGEGLICHENE SCHEIBE

Eine Scheibe mit einer Unwucht sitzt mit ihrem Mittelpunkt auf einer Welle. Die Distanz zwischen dem Mittelpunkt und dem Schwerpunkt der Scheibe betrage *e*. Es soll der Ausschlag *y* des Mittelpunktes der Scheibe bei Rotation um ihre mittlere Lotachse in Abhängigkeit von der Winkelgeschwindigkeit

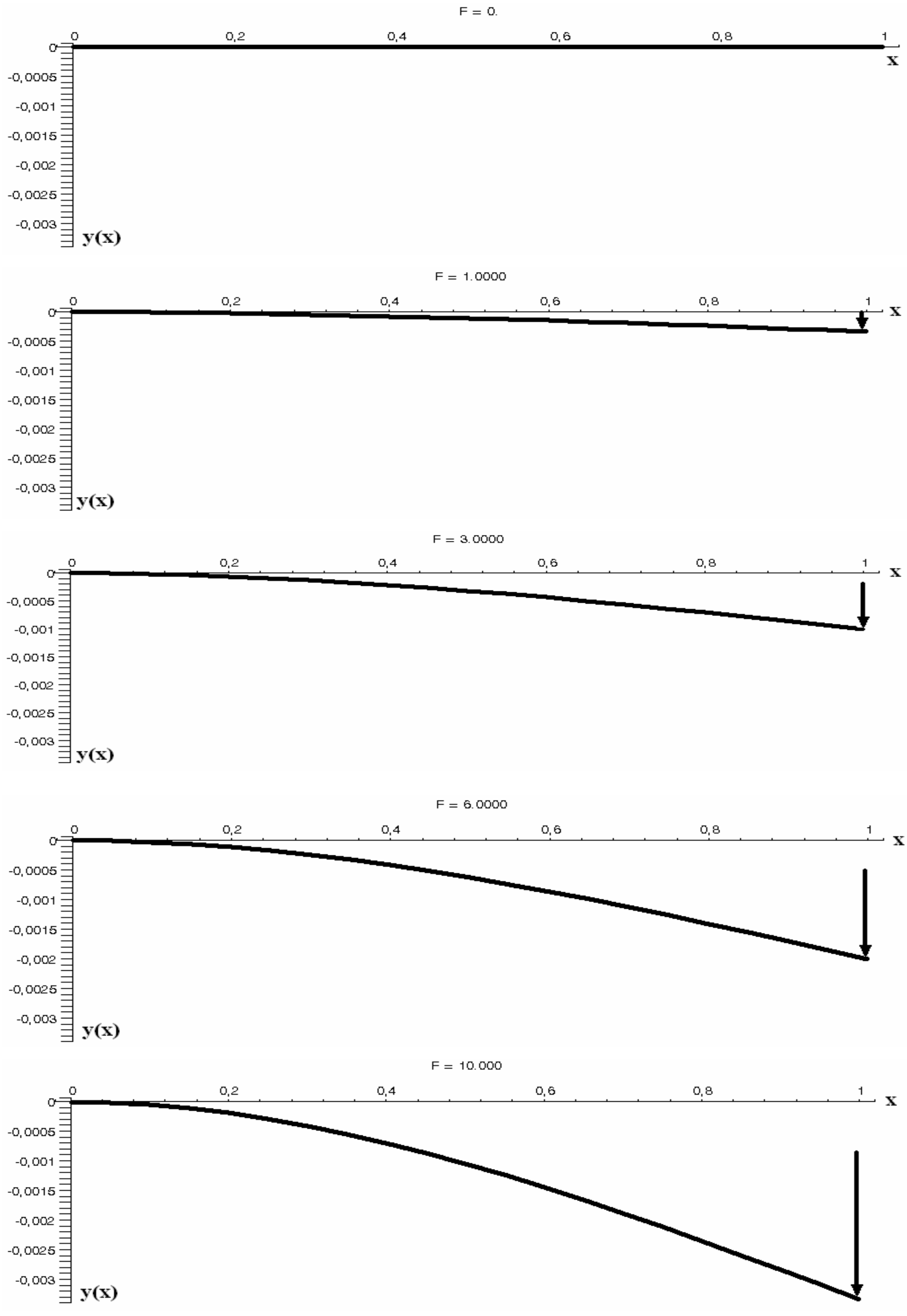


Abbildung 2: Die Biegelinien für die verschiedene Kräfte.

analysiert werden. Mit der Zunahme der Winkelgeschwindigkeit nimmt auch die Zentrifugalkraft zu. Die Welle muss die Zentrifugalkraft ableiten, es erfolgt eine Verformung der Welle. Der Ausschlag y ist also abhängig von der Winkelgeschwindigkeit ω und auch von der Federkonstante c der Welle. Falls ω

den kritischen Wert ω_{krit} annimmt, tritt Resonanz auf. Der Ausschlag *y* wird dann unendlich groß, die Welle wird zerstört (Abbildung 3).

Der entstehende Effekt ist gleichartig, falls die Scheibe um eine Horizontalwelle rotiert. In diesem Fall tritt der Effekt selbst dann ein, wenn die Scheibe völlig ausgewuchtet ist (Abbildung 4).

Das Gewicht der Scheibe verursacht die während der Achsendrehung auftretende Exzentrizität. Auch hier kommt es zu einer federnden Verformung der Welle.

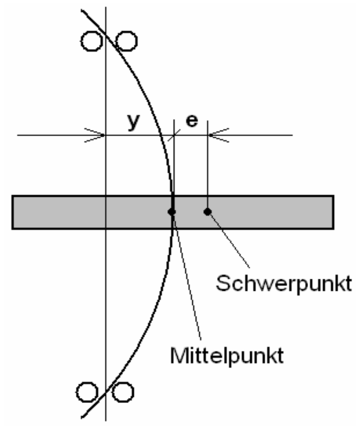


Abbildung 3: Um die Lotachse drehende Scheibe.

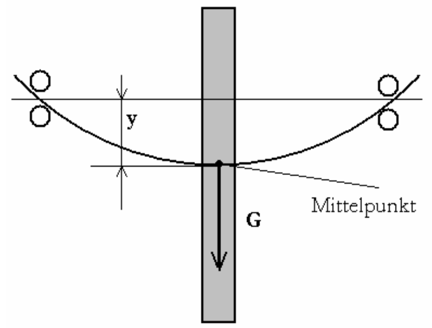


Abbildung 4: Um die horizontale Welle drehende Scheibe.

Simulation mit Hilfe von *Maple*

Der Ausschlag *y* des Mittelpunktes der Scheibe von der Lotachse kann als Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω aufgeschrieben werden:

$$y(\omega) = \frac{e m \omega^2}{\frac{1}{c} - \omega^2 m}$$

Abbildung 5 zeigt den Ausschlag *y* in einer Umgebung der kritischen Winkelgeschwindigkeit ω_{krit}. Als Parameter wurden die Exzentrizität e=0.01m, die Masse der Scheibe m=1kg und die Federkonstante der Welle c=10^{-5}m/N gewählt.

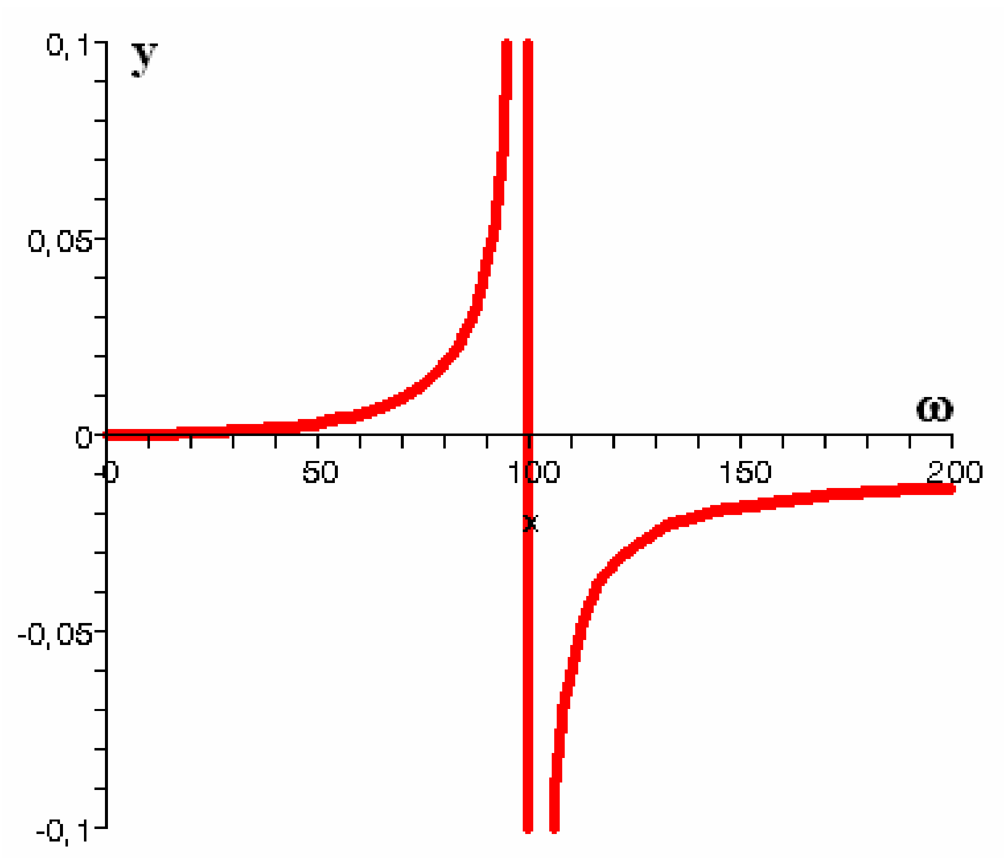


Abbildung 5: Der Ausschlag des Mittelpunktes.

REFERENZEN

1. Kocsis, I., Application of Maple ODE Analyser in the investigation of differential equations in higher engineering education. *Proc. Felsõoktatási matematika-, fizika- és számítástechnika oktatók XXX. Konferenciája.*, Pécs, Hungary (2006).
2. Tiba, Z., Notwendigkeit der Modellbildung und Simulation bei der Dimensionierung mechanischer Konstruktionen. *DE MFK Tudományos Közlemények* 2002/1, 117-125 (2002).
3. Tiba, Z., Bereiche der Modellbildung bei der Dimensionierung mechanischer Konstruktionen. *Manufacturing Engineering*, University of Technology in Kosice 2004/4, 49-52 (2004).
4. Tiba, Z., Dynamische Modelle für die Beschreibung der Torsions- und Biege-Schwingungen von Kardangetrieben. *DE MFK Tudományos Közlemények* 2005/1, 67-79 (2005).
5. Maplesoft, *Maple 9* Learning Guide. Waterloo: Maplesoft (2003).

BIOGRAPHIEN

Imre Kocsis ist der Leiter des Lehrstuhls Mathematik, Physik und Informatik an der Technischen Fakultät der Universität Debrecen, Ungarn. Im Jahr 1992 beendete er sein Studium an der Universität Debrecen als Diplomlehrer für Mathematik, Physik und Informatik. Er promovierte an der Universität Debrecen in 2004. Sein Forschungsgebiet ist die Theorie von Funktionalgleichungen.

Zsolt Tiba ist der Leiter des Lehrstuhls Maschinenbau an der Technischen Fakultät der Universität Debrecen, Ungarn. Im Jahr 1989 beendete er sein Studium an der Technischen Universität in Miskolc, Ungarn als Diplomingenieur für Maschinenbau. Seine Doktorarbeit machte er bei der Walterscheid GmbH in Deutschland, und 1998 promovierte er an der Gödöllõer Agrarwissenschaftlichen Universität mit einer Arbeit zu Dynamischen Modellen des Kardanantriebs. Seine Lehrfächer sind Maschinenelemente und Maschinendynamik.

Gabriele Sauerbier ist Lehrkraft für Mathematik am Fachbereich Maschinenbau/ Verfahrens- und Umwelttechnik der Hochschule Wismar. Im Jahr 1982 beendete sie ihr Studium an der wissenschaftlichen Universität (ELTE) Budapest, Ungarn als Diplomlehrerin für Mathematik und Physik, 1988 promovierte sie an der Pädagogischen Hochschule Güstrow mit einer Arbeit zu Pro-p-Gruppen und LIE-Algebren. Nach einer kurzen Tätigkeit an der Universität Rostock, arbeitete sie bis 2002 in der PNP Luftfedersysteme GmbH zu theoretischen Fragestellungen, Simulationen und messtechnischen Auswertungen von Schwingungssystemen. Engagiert setzt sie sich für eine moderne, anwendungsorientierte Mathematikausbildung der Ingenieurstudenten ein. Frau Dr. Sauerbier ist Mitglied des deutschen Mathematikolympiaden e.V. und des Gottlob-Frege-Zentrum der Hochschule Wismar, dort arbeitet sie gegenwärtig in mehreren internationalen Projekten.