

---

# Zur Rolle der Intuition in der Mathematik-Ausbildung

Thomas Risse

Institut für Informatik und Automation, Hochschule Bremen  
Flughafenallee 10, D-28199 Bremen, Deutschland

---

Ohne Intuition keine Hypothesen-Bildung, keine Beweis-Idee, kein Lösungsansatz – wenn dem zuzustimmen ist, dann gehört die Entwicklung der Intuition in das Zentrum der Mathematik-Ausbildung. Denn den Studierenden erscheint die Mathematik zunächst alles andere als intuitiv. Wir müssen also gerade das Nicht-Intuitive betrachten, um die Schwierigkeiten verstehen und den Studierenden dabei helfen zu können, das *richtige Gefühl* zu entwickeln. Immerhin haben die Irritationen, die nicht-intuitive Resultate auslösen, fruchtbare Entwicklungen in der Mathematik selbst angestoßen. Einige *klassische* Beispiele sollen dies illustrieren. Bin packing liefert ein Beispiel eines nicht-intuitiven Resultats aus dem ingenieurwissenschaftlichen Bereich. Dieses Beispiels wird im Detail vorgestellt, um hier den Nutzen, sich ausgerechnet den nicht-intuitiven Resultaten zuzuwenden, zu bewerten.

---

## EINLEITUNG

Neben der Vermittlung von Wissen, dem Entwickeln von Kompetenzen ist sicherlich auch das Ausbilden von Intuition integraler Bestand der Mathematik-Ausbildung. Intuition spielt eine wesentliche Rolle bei der Hypothesen-Bildung, bei der Modellierung, bei der Suche nach Lösungswegen, bei der Generierung von Plausibilitätstests, also bei allen Schritten auf dem Weg zur Formalisierung.

Studierenden erscheint die Mathematik zunächst alles andere als intuitiv: sie müssen sich an so Befremdliches wie den  $\mathbb{R}^n$ , an beliebig Großes ( $n \rightarrow \infty$ ,  $n$  strebe gegen Unendlich) oder an beliebig Kleines (sei  $\varepsilon > 0$ , sei  $\varepsilon$  beliebig klein, aber positiv) gewöhnen. Das Augenmerk von uns Lehrenden muss also gerade dem Nicht-Intuitiven gelten, um die Schwierigkeiten der Studierenden verstehen und den Studierenden dabei helfen zu können, das *richtige Gefühl* zu entwickeln.

Die Mathematik hält übrigens genügend Nicht-Intuitives, d.h. Befremdliches, *Wider-Erwartetes*, Überraschendes, Unerwartetes und Unglaubliches bereit. Dies zeigen einerseits die Paradoxe der alten Griechen, z.B. *ich bin ein Kreter*, die Antinomien der Mengenlehre, z.B. die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, bis hin zu den so genannten Monstern etwa aus der Analysis, z.B. nirgends stetige Funktionen, oder aus Topologie, z.B. Flächen-füllende Kurven, oder andererseits die bekannten Über-

raschungen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Im ersten Abschnitt versuchen wir eine Begriffsbestimmung. Es zeigt sich, dass die changierende Bedeutung des Begriffs auch von der Denkschule abhängt. Nichtsdestotrotz stellen wir im zweiten Abschnitt einige Beispiele für nicht-intuitive Sachverhalte aus verschiedenen Gebieten der Mathematik vor und bewegen uns dabei letztlich auf klassischen Wegen [1]. Im dritten Abschnitt untersuchen wir als ein solches Beispiel einfach geartete bin packing Probleme: schon für kleine Problem-Größen ergeben sich überraschende Lösungen (und viele offenen Fragen). Für große Problem-Größen wächst der Verschnitt in unerwarteter, eben nicht-intuitiver Weise. Im letzten Abschnitt versuchen wir, die Strategie, sich gerade Nicht-Intuitivem zuzuwenden, zu bewerten. Natürlich steht das bin packing Ergebnis nicht allein: neben der Einsicht als solcher beschert uns die Auseinandersetzung mit solchen Problemen weitere Erfahrungen und Anreize für weiterführende Untersuchungen, lässt uns nicht-intuitive Resultate leichter akzeptieren und mahnt selbstverständlich auch, unvoreingenommener Intuition zu misstrauen.

## BEGRIFFSBESTIMMUNG

Der Begriff Intuition ist nicht leicht zu fassen: Georg Polya wendet sich an Laien, wenn er sehr verkürzend Kant mit *all human cognition begins with intuitions, proceeds hence to conceptions, and ends in ideas*

zitiert [2]. Hermann Weyl stellt kurz und bündig fest: *intuition is mind's ordinary act of seeing what is given to it* [3].

Mehrere Facetten des Begriffs Intuition beleuchten Philip Davis und Reuben Hersh [4]. Intuitiv ist alles, was:

- Nicht streng (was ist schon streng?);
- Visuell, also offensichtlich evident, aber möglicherweise zweifelhaft oder sogar falsch [1];
- Aufgrund von etwa Erfahrung einleuchtend, überzeugend, nach billigem Ermessen als richtig anzunehmen;
- Unvollständig, lückenhaft;
- Heuristisch, an Beispiele, an etwa die Physik, usw. angelehnt;
- Ganzheitlich und nicht detailliert argumentiert

ist. Die Bedeutung, d.h. der Gebrauch ist abhängig von der Denkschule, der wir angehören: wir sind laut:

- Zu 65% Platonisten: diese entdecken ideale, zeitlos existierende mathematische Objekte: etwa die Kontinuumshypothese ist entweder wahr oder falsch – wir verstehen nur (noch) nicht genug von den reellen Zahlen! Dabei kann die Kontinuumshypothese auf der Grundlage der Axiome der formalen Mengenlehre weder bewiesen (Gödel, 1937) noch widerlegt (Cohen, 1964) werden [4];
- Zu 30% Formalisten, die nur Axiome und Ableitungsregeln kennen: Realität existiert nicht! Jede Bedeutung ist außer-mathematisch!
- Und zu 5% Konstruktivisten, für die nur das, was finitistisch konstruiert werden kann, überhaupt existiert [5]!

mit der Folge, dass

- Nur die Intuition den echten Platonisten mit der idealen mathematischen Welt verbindet!
- Laut Formalisten Nicht-Formalisten wahre Sätze mittels falscher Schlüsse nur mittels Intuition finden können!
- Und dass für Konstruktivisten nur die natürlichen Zahlen (intuitiv!) gegeben sind.

## FALL-BEISPIELE

Die folgenden Beispiele zeigen Nicht-Intuitives, Überraschendes, Unglaubliches, Wider-Erwartetes' aus vielen Bereichen der Mathematik:

- Unendlichkeiten:

$$\aleph = |2\mathbb{N}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = |\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}|$$

$$2^{\aleph} = |[0,1]| = |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}| = |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| < 2^{2^{\aleph}} < \dots$$

- Paradoxa:
  - Logische Paradoxa etwa aufgrund von Selbstreferenz wie z.B. die Aussage eines alten Griechen *ich bin ein Kreter*
  - Geometrische Widersprüche, z.B. in Zeichnungen und Radierungen von M.C. Escher (Abbildung 1) [6].

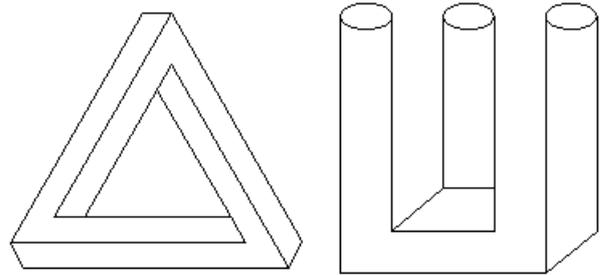


Abbildung 1: Zeichnungen von M.C. Escher.

- Einige Antinomien, die gleichwohl im Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem äquivalent so doch zunehmend weniger intuitiv erscheinen:
  - Auswahl-Axiom (AC): Sei eine Menge A von nicht-leeren Mengen gegeben. Dann lässt sich aus jedem Element von A ein Repräsentant auswählen [7];
  - Wohlordnungssatz/-prinzip: Jede Menge, wie z.B.  $\mathbb{R}$ , kann wohlgeordnet werden, d.h. es gibt eine Ordnung auf dieser Menge, so dass jede Teilmenge ein kleinstes Element hat [7];
  - Banach-Tarski-Paradox [8]: eine Kugel im  $\mathbb{R}^3$  kann so in fünf Teile zerlegt werden, dass diese rotiert zu zwei Kugeln mit jeweils dem Volumen der Original-Kugel zusammengesetzt werden können.
- Monster [9], deren Entdeckung zunächst äußerst irritierend war, die aber ganz wesentlich zur Entwicklung der fraktalen Geometrie beigetragen haben [10]:
  - Nirgendwo stetige Funktionen, wie z.B. die charakteristische Funktion  $\chi_{\mathbb{Q}}$  von  $\mathbb{Q}$ ;
  - Überall stetige, aber nirgendwo differenzierbare Funktionen wie z.B. die Weierstraß-Funktion  $f(t) = \sum_{k=1, \dots, \infty} a^k \sin(b^k \pi t)$  für geeignete Konstanten a und b. Solche Funktionen können – ebenso wie die im Folgenden angeführten Monster Peano-Kurve, Sierpiński-Kurve und Brower-Karte – auch

durch rekursive Grenzprozesse erzeugt werden. Abbildung 2 zeigt die ersten beiden Generationen:

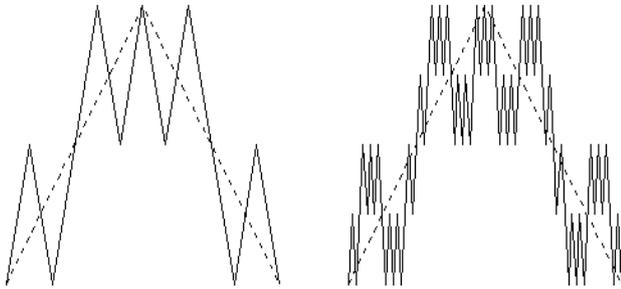


Abbildung 2: Die ersten Generationen.

- Flächen-füllende Kurven wie z.B. die das Einheitsquadrat füllende Peano-Kurve, die in einem rekursiven Grenzprozess erzeugt wird. Abbildung 3 zeigt die ersten beiden Generationen:

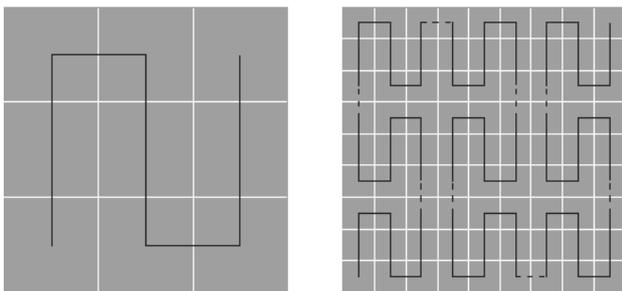


Abbildung 3: Die ersten Generationen.

- Kurven, die (fast) nur aus Verzweigungspunkten (die Kurve schneidet den Rand beliebig kleiner Umgebungen eines Verzweigungspunktes in mehr als zwei Punkten) bestehen, wie z.B. die Sierpiński-Kurve, die wie die Peano-Kurve in einem rekursiven Grenzprozess erzeugt wird: aus einem gleichseitigen Dreieck werden sukzessive kleinere gleichseitige Dreiecke entnommen; das verbleibende Skelett ist die gesuchte Kurve (Abbildung 4).

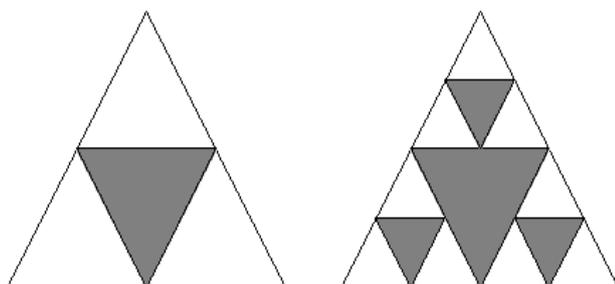


Abbildung 4: Gesuchte Kurve.

- Landkarten von Ländern, die unendlich viele Punkte ihrer Grenzen gemeinsam haben, z.B. die Brower-Karte [1]. Ausgangspunkt sind drei Länder, die sich schrittweise in den weißen Bereich hin ausdehnen. Abbildung 5 zeigt die erste Generation und die drei Schritte, die zur zweiten Generation führen.

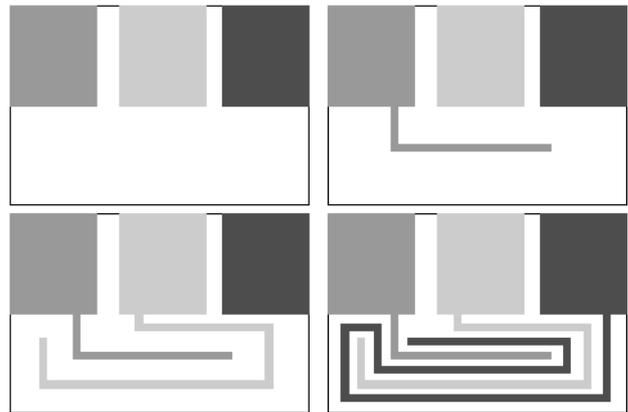


Abbildung 5: Die erste Generation.

Studierende ingenieurwissenschaftlicher Studiengänge werden eher auf folgende Überraschungen treffen:

- Ein um den Äquator der Erdkugel gespanntes und um 10m verlängertes Seil bildet einen Kreis mit einem Radius, der um 1m größer als der Erdradius ausfällt.
- Stellvertretend für viele clevere Lösungswege: wie kommt man bloß darauf, Konstanten zu variieren und gewinnt auch noch ein so potentes Verfahren!
- Auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung ergeben sich unerwartete Ergebnisse: Beispiele sind das notorische Geburtstagsproblem (mit welcher Wahrscheinlichkeit haben in einer Gruppe mindestens zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag), Probleme im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten [11]; und das Ziegen- oder Monty Hall Problem [12].

## BIN PACKING

Bin packing heißt, möglichst viele bestimmte Objekte in einem Behältnis unterzubringen, oder andersherum, für gegebene Objekte das kleinste Behältnis vorgegebenen Typs zu finden, in das diese Objekte gepackt werden können.

Die einfachste Version des bin packing besteht darin, das Quadrat kleinster Seitenlänge  $s(n)$  zu bestimmen, in das  $n$  Einheitsquadrate gepackt werden können. Friedman gibt in einen Überblick über die derzeitigen Ergebnisse für kleine  $n$  (Tabelle 1) [13].

Tabelle 1: Ergebnisse.

n	s(n)
1	1
2, 3, 4	2
5	$2+1/\sqrt{2}$
6, 7, 8, 9	3
10	$3+1/\sqrt{2}$
11	$\leq \approx 3.8771$
12, 13	$\leq 4$
14, 15, 16	4
17	$\leq \approx 4.6756$
18	$\leq (7+\sqrt{7})/2$
19	$\leq 3+4/3\sqrt{2}$
...	...

Beispiele für  $n = 5, 10, 11, 17$  und  $19$  sollen die Schwierigkeit illustrieren, optimale (und sicherlich überraschende) Lösungen zu finden (Abbildung 6).

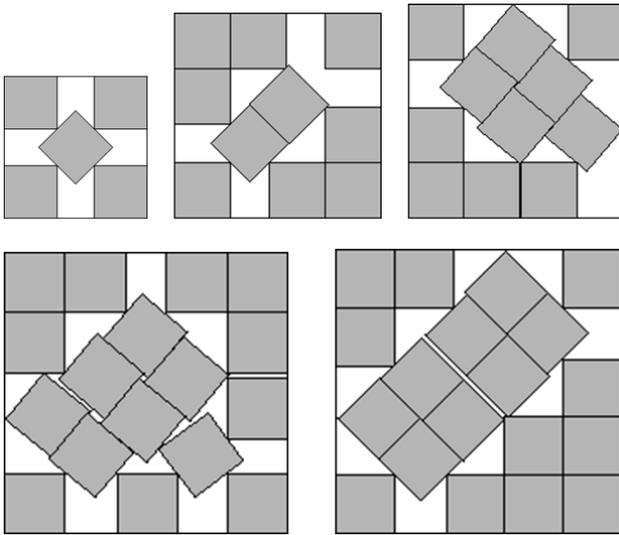


Abbildung 6: Illustration des Schwierigkeitsgrades.

Für beliebige  $n$  lassen sich (derzeit) offensichtlich keine allgemeinen Aussagen über  $s(n)$  und daher auch nicht über den Verschnitt (waste)  $W(s(n)) = s^2(n) - n$  machen.

Erdős und Graham haben das bin packing Problem für große  $n$  angegangen: wie viele (offene) Einheitsquadrate passen in ein großes Quadrat  $S(\alpha)$  der Seitenlänge  $\alpha \gg 1$  und wie groß ist der Verschnitt [14]?

Sei  $N = \lfloor \alpha \rfloor$  der ganzzahlige Anteil von  $\alpha$ , d.h.  $\alpha = N + \varepsilon$ . Intuitiv scheint nur möglich, das große Quadrat naiv mit  $N^2$  Einheitsquadraten zu packen und zwei schmale Rechtecke der Breite  $\varepsilon$  als Verschnitt  $W(\alpha) = \alpha^2 - 2\alpha(\alpha - N) + (\alpha - N)^2$  hinzunehmen. Dann wäre aber  $W(\alpha) = (N + \varepsilon)^2 - N^2 = 2\varepsilon N + \varepsilon^2$  linear in  $N$ . Erdős und Graham zeigen dagegen [14].

$$W(\alpha) = \Omega(\alpha^{7/11})$$

(Wie üblich ist  $f(x) = \Omega(g(x)) \Leftrightarrow \exists$  positive Konstanten  $c$  und  $d$  mit  $c g(x) < f(x) < d g(x)$  definiert). Wie das geht, zeigen die originalen Skizzen (Abbildung 7): Erdős und Graham zerlegen das Quadrat  $S(\alpha) = Q(N) \cup R(\beta, \gamma) \cup R(\gamma, \beta)$  in das Quadrat  $Q(N)$  mit  $N := \lfloor \alpha - \alpha^{8/11} \rfloor$  und zwei Rechtecke  $R(\beta, \gamma)$  mit  $\beta := \alpha - N = \Omega(\alpha^{8/11})$  und  $\gamma = \Omega(\alpha)$ .

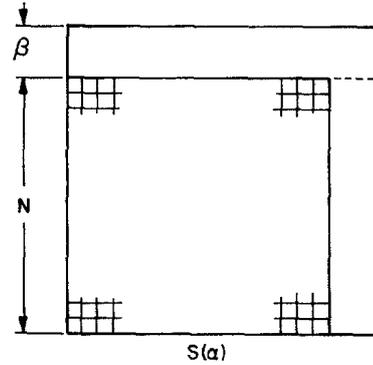


Abbildung 7: Originale Skizze.

Verschnitt tritt nur in den Rechtecken  $R(\beta, \gamma)$  auf (Abbildung 8). Für  $n := \lfloor \beta \rfloor$  werden nun in  $R(\beta, \gamma)$  Rechtecke  $R(1, n+1)$  platziert. Dabei sei  $D := \Omega(\alpha^{2/11})$  und daher  $D' = \Omega(\alpha^{4/11})$ . Die Rechtecke  $R(1, n+1)$  sind dabei um  $\theta = \Omega(\alpha^{-4/11})$  gegenüber der Vertikalen geneigt.

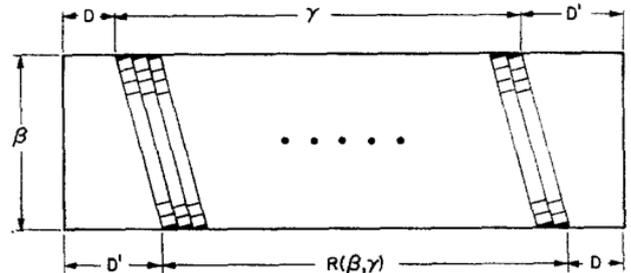


Abbildung 8: Verschnitt.

Zum Verschnitt tragen die kleinen schwarzen rechtwinkligen Dreiecke, jedes mit Flächeninhalt von  $\frac{1}{2} 1 \tan \theta = \Omega(\alpha^{-4/11})$ , zusammen also mit der Fläche  $\Omega(\alpha) \Omega(\alpha^{-4/11}) = \Omega(\alpha^{7/11})$  bei. Die beiden (identischen) Trapeze links und rechts werden nun in kleine Trapeze  $T_k$  und ein Rest-Trapez  $X$  zerlegt (Abbildung 9).

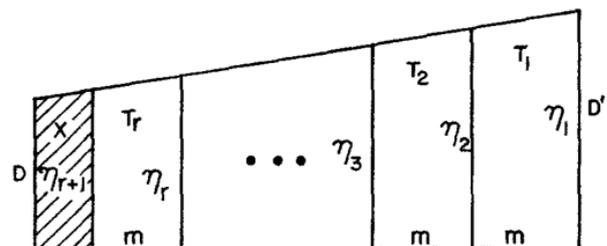


Abbildung 9: Trapez.

Die  $r$  Trapeze  $T_k$  haben die feste Breite  $m := \lfloor \alpha^{4/11} \rfloor$ . Also gilt  $r = \beta/m = \Omega(\alpha^{4/11})$ . Die Fläche  $|X|$  des Rest-Trapezes  $X$  ist  $|X| < m D = \Omega(\alpha^{6/11})$ . Jedes der  $r = \Omega(\alpha^{4/11})$  Trapeze  $T_k$  mit den Seiten  $\eta_k$  und  $\eta_{k+1}$  wird nun seinerseits in ein großes Rechteck  $R(m, h_k)$  mit  $h_k = \lfloor \eta_k - \alpha^{2/11} \rfloor$  und viele Rechtecke  $R(1, s_k+1)$  mit  $s_k = \lfloor \eta_k \rfloor - h_k$  zerlegt (Abbildung 10).

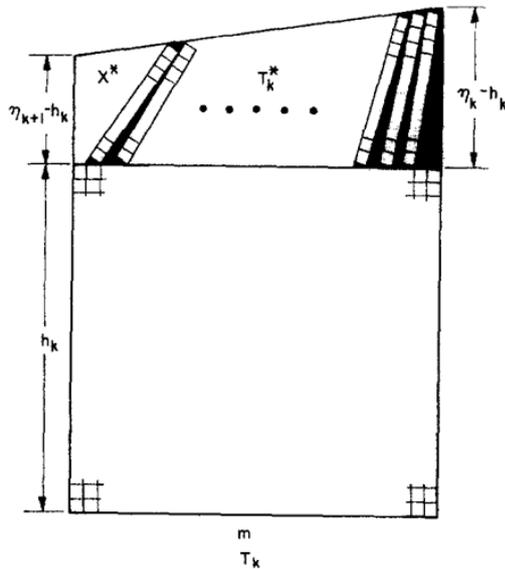


Abbildung 10: Zerlegung.

Der Winkel der kleinen schwarzen rechtwinkligen Dreiecke am Rand variiert zwischen  $\Omega(\alpha^{-2/11})$  und  $\Omega(\alpha^{-1/11})$ . Daher tragen diese Dreiecke insgesamt  $\Omega(m) \Omega(\alpha^{-1/11}) = \Omega(\alpha^{3/11})$  zum Verschnitt bei. Die Summe der Spitzenwinkel der Dreiecke zwischen den  $R(1, s_k+1)$  ist  $\Omega(\alpha^{-1/11})$ , so dass sich ihr Verschnitt durch  $m \Omega(\alpha^{-1/11}) = \Omega(\alpha^{3/11})$  abschätzen lässt. Auch die Fläche von  $X^*$  ist sicher kleiner als die des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten  $\eta_k - h_k = \Omega(\alpha^{2/11})$  und  $(\eta_k - h_k) \tan \theta^* = \Omega(\alpha^{1/11})$  und dem Winkel  $\theta^* = \Omega(\alpha^{-1/11})$ , demselben Winkel  $\theta^*$  von  $X^*$  in Figur 4 links unten. Also gilt  $|X^*| < \Omega(\alpha^{3/11})$ .

Zusammenfassend ergibt sich also der Verschnitt in Figur 2 zu  $\Omega(\alpha^{7/11})$ , derjenige durch  $X$  in Figur 3 zu  $\Omega(\alpha^{6/11})$  und der Verschnitt in Figur 4 in  $X^*$  und in jedem der  $r = \Omega(\alpha^{4/11})$  Trapeze  $T_k$  zu  $\Omega(\alpha^{3/11})$ . Damit ist  $W(\alpha) = \Omega(\alpha^{7/11})$ . QED.

### BEWERTUNG

Für die Beschäftigung mit dem nicht-intuitiven Resultat von Erdős und Graham spricht vor allem der Zuwachs an (Beweis-technischer) Erfahrung, die Idee, sich auf den Verschnitt zu konzentrieren, und die Herausforderung, obere und untere Schranken zu etablieren. Die Anschaulichkeit des konstruktiven Verfahrens

erleichtert es, das Nicht-Intuitive zu akzeptieren, wenn auch etwa die Wahl der Exponenten scheinbar unmotiviert ist. Zugleich wirft sich die Frage auf, ab welcher Größe der Seitenlänge  $\alpha$  das Verfahren welchen konkreten Zuwachs der Zahl der gepackten Einheitsquadrate zeitigt. Zuletzt gibt das Verfahren aber wohl kaum einen Hinweis darauf, wie etwa andere polygonal berandete Objekte zu packen sind. Weitere Verallgemeinerungen liegen auf der Hand und haben überall da, wo beispielsweise aus Walzstahl Karosserieteile ausgestanzt werden, ihre ganz praktische Bedeutung.

Nicht-intuitive Resultate sind naturgemäß spektakulär. Dieser Reiz fordert zur Beschäftigung mit ihnen heraus. Die klassischen Beispiele zeigen, dass diese Auseinandersetzung sehr fruchtbar ist und zu tieferen Einsichten geführt hat. Dasselbe scheint mir auch auf der prosaischeren Ebene der mathematischen Ausbildung zu gelten: warum nicht den aktivierenden Reiz des Nicht-Intuitiven nutzen? Warum nicht nahe legen, dass wir das, was uns nicht-intuitiv vorkommt, vielleicht nur noch nicht richtig verstanden haben? Im besten Fall lassen nicht-intuitive Resultate uns solange keine Ruhe, bis eine bessere Einsicht den störenden Reiz neutralisiert. Insofern spielt das Nicht-Intuitive die Rolle des Perturbierenden, des Verstörenden, dem im Konstruktivismus, S.35 Studierende auszusetzen sind, um in ihnen neue Einsichten und Ansätze zu provozieren [15].

Diese Auseinandersetzung führt letztendlich zur Aneignung tieferer Einsichten (vgl. [1] und [10]), erweitert den mathematischen Horizont und trainiert eine gesunde Skepsis gegenüber naivem Glauben an die Unfehlbarkeit der eigenen Intuition.

### REFERENZEN

1. Catlin, D., Intuition Led Astray, (eg in gambling) <http://catlin.casinocitytimes.com/articles/1238.html>, weitere Beispiele: <http://catlin.casinocitytimes.com/Archives/>
2. Davis, P.J. und Hersh, R., *Erfahrung Mathematik*. Basel: Birkhäuser (1994).
3. Duchin, M., Arguing from repugnance – episodes in the logical manipulation of shared information, ethics and epistemology. *Proc. 3<sup>rd</sup> Graduate Student Philosophy Conf.*, New York, USA, [www.newschool.edu/gf/phil/conference/conf04\\_duchin.pdf](http://www.newschool.edu/gf/phil/conference/conf04_duchin.pdf)
4. Erdős, P. und Graham, R.L., On packing squares with equal squares. *J. Combinatorial Theory*, A 19, 119-123 (1975), [www.math.ucsd.edu/~fan/ron/papers/75\\_06\\_squares.pdf](http://www.math.ucsd.edu/~fan/ron/papers/75_06_squares.pdf)

5. Feferman, S., Mathematical intuition vs. mathematical monsters. *Synthese*, 125, 317-332 (2000), <http://math.stanford.edu/~feferman/papers/intuition.pdf>
6. Friedman, E., Packing unit squares in squares – a survey and new results. *Electronic J. Combinatorics*, DS#7, Oktober, 1-24, (2005), [www.combinatorics.org/Surveys/ds7.html](http://www.combinatorics.org/Surveys/ds7.html)
7. Glasersfeld, E. von, *Konstruktivismus statt Erkenntnistheorie*. In: Dörfler, W. und Mitterer, J. (Hrsg.), *Konstruktivismus statt Erkenntnistheorie*. Klagenfurt: Drava, 11-39 (1998).
8. Hans Hahn and *The Crisis of Intuition* (2006), [http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Extras/Hahn\\_crisis\\_in\\_intuition.html](http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Extras/Hahn_crisis_in_intuition.html)
9. Mandelbrot, B., A crisis of intuition as viewed by Felix Klein and Hans Hahn and its resolution by fractal geometry. *The Fractal Geometry of Nature* (c.1982), [http://math.yale.edu/mandelbrot/web\\_pdfs/WKleinCrisisOfIntuition.pdf](http://math.yale.edu/mandelbrot/web_pdfs/WKleinCrisisOfIntuition.pdf)
10. Monk, J.D., On the foundations of set theory. *American Mathematical Monthly*, 77, 703-711 (1970).
11. Polya, G., The Goals of Mathematical Education. Videotaped lecture 1969, *ComMuniCator*, September/December (2001), <http://mathematicallysane.com/analysis/polya.asp>
12. Risse, T., (Interaktive) Puzzles – Kryptographie, Kodierung, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Erzeugung von Pseudo-Zufallszahlen, Test auf Zufälligkeit, etc, [www.weblearn.hs-bremen.de/risse/MAI/docs/puzzles.pdf](http://www.weblearn.hs-bremen.de/risse/MAI/docs/puzzles.pdf)
13. Sugihara, K., Solid Objects which Generate Anomalous Pictures, [www.simplex.t.u-tokyo.ac.jp/~sugihara/](http://www.simplex.t.u-tokyo.ac.jp/~sugihara/) oder [www1.odn.ne.jp/sugihara/illusion/anomalouspictures.html](http://www1.odn.ne.jp/sugihara/illusion/anomalouspictures.html)
14. Weyl, H., Address on the Unity of Knowledge. Columbia University Bicentennial Celebration, 1954. Reprinted in: Chandrasekharan, K. (Hrsg.), *Gesammelte Abhandlungen, I-IV*. Berlin: Springer, 623-630 (1968).
15. Winkler, R., *Wie Macht Man 2 Aus 1? Das Paradoxon von Banach-Tarski*. Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Höheren Schulen, 33, 166-196 (2001), <http://dmg.tuwien.ac.at/winkler/pub/>

## BIOGRAPHIE



Thomas Risse ist Diplom-Mathematiker und promovierter Physiker. Derzeit arbeitet er als Professor für Rechnerstrukturen, Computer-Graphik und Mathematik im Fachbereich Elektrotechnik & Informatik der Hochschule Bremen.

In der Forschung war er z.B. als visiting scientist am T.J.Watson Research Center, Yorktown Heights der IBM u.a. zu den Themen: Fehlertolerante Systeme und Computer-Graphik tätig. Er konnte Erfahrungen in seinen praktischen Tätigkeiten u.a. in den Bereichen Datenschutz und Datensicherheit sowie Medizin-Informatik sammeln.