Global J. of Engng. Educ., Vol.8, No.3
Published in Australia

Fluch und Segen der Computermathematik

Dieter Schott
Hochschule Wismar – University of Technology, Business and Design
Fachbereich Elektrotechnik und Informatik, Philipp-Müller-Straße 21, D-23952 Wismar, Deutschland

Welchen Platz Rechner-gestützte Mathematiksysteme (wie *Matlab*) mit ihren Komponenten (numerisches und symbolisches Rechnen, grafisches Darstellen, Experimentieren) in der Ausbildung von Ingenieurstudenten einnehmen sollen, ist eine kontrovers diskutierte Frage. Neben einleuchtenden Vorteilen (anspruchsvollere und praktisch bedeutsamere Beispiele, Entlastung vom stupiden Rechnen und Umformen, viele Möglichkeiten zum Experimentieren, Einbindung von Informatikteilen) gibt es auch Gefahren (Vernachlässigung der Mathematikkenntnisse, blindes Vertrauen in die Ausgaben des Rechners, fehlendes Gefühl für die Korrektheit von Ergebnissen, Fehlinterpretationen von Ergebnissen des Rechners, Unfähigkeit zum interaktiven Eingreifen bei unvorteilhaften oder fehlenden Darstellungen der Ergebnisse). Im Rahmen von *Matlab* werden dazu typische Beispiele genannt und diskutiert. Das Dilemma ist: Obwohl die Mathematikkenntnisse vieler Studienanfänger katastrophal sind, verlangt die sinnvolle Einbindung von Mathematiksystemen u.a. gerade ein gediegenes mathematisches Grundwissen. Moderne Mathematik in der Ingenieurausbildung kann also nicht in der Reduzierung auf Computermathematik bestehen.

EINLEITUNG

Im Zusammenhang mit der Einführung des interdisziplinären Studienganges *Computational Engineering Science* an der RWTH Aachen schreibt Prof. Abel:

> *Der Einsatz von Computern zur Bearbeitung technischer Probleme gewinnt immer mehr an Bedeutung. Allerdings wird weder die bloße Verfügbarkeit immer leistungsfähigerer Computer noch die Fähigkeit, sie betreiben zu können, je ausreichen, die großen naturwissenschaftlichen/technologischen Herausforderungen der Zukunft lösen zu können. Die eigentliche Hauptschwierigkeit liegt in der mathematischen Darstellung – der Modellierung – der technischen Fragestellung, um sie der Bearbeitung durch Computer zugänglich zu machen. In der Vermittlung der dazu notwendigen Fähigkeiten, die natürlich den Gebrauch von Rechensystemen in enger Verbindung zu faszinierenden Anwendungen einschließen, liegt das Kernanliegen dieses neuen Studienganges* [1].

Moderne Mathematikausbildung ist ohne Einsatz von Computern nicht denkbar. Die Computermathematik ist eine reizvolle Herausforderung, die zwar gegebenenfalls bisherige Routineaufgaben überflüssig macht, an die mathematische Kompetenz qualitativ aber eher höhere Anforderungen stellt als die klassische Mathematik (ohne Computereinsatz). Wer also glaubt, mit der Computermathematik die PISA-Problematik im Mathematikbereich [2] abzuschaffen, der irrt gewaltig.

Ein mathematisches Softwaresystem ist ein grandioses Werkzeug. Wie bei jedem Werkzeug kann ein hilfloser Laie damit aber auch immensen Schaden anrichten. Es gibt viele Fallen, in die man hineintappen kann, wenn man die Syntax oder die Semantik der Befehle nicht kennt bzw. wenn das nötige mathematische Grundwissen fehlt.

In dem Buch [3] mit der Internet-Seite [4] wird eine Synthese zwischen mathematischem Grundwissen und Computerlösung auf der Grundlage von *Matlab* angeboten. Das Buch widmet sich ausschließlich und detaillierter der Lösung von mathematischen Problemen mit Hilfe von *Matlab* [5].

Mathematik hat im Rationalismus Hochkonjunktur, verliert aber in der spaßorientierten Moderne an gesellschaftlicher Wertschätzung. Ernsthafte Mathematik muss sich gegen bequemen lustigen Unsinn behaupten. Daher ist die Motivation der Studenten äußerst wichtig geworden. Trotz zusätzlicher Schwierigkeiten kann gerade die Computermathematik einen zusätzlichen Motivationsschub bringen.

Die folgenden Beispiele zeigen einige Tücken der Computermathematik, die insbesondere bei gedankenlosem Einsatz des Computers zu Fehlern führen. Mit dem nötigen mathematischen Grundwissen können sie aber meist umgangen werden.

Hinweis: Die englischen *Matlab*-Kommentare (!! Warnungen, ?? Fehler) werden sinngemäß deutsch wiedergegeben. Rechnungen ohne die Vereinbarung syms oder abgeleitete Funktionen (aus der symbolischen Toolbox) sind numerisch.

WURZELN AUS KOMPLEXEN ZAHLEN

Aufgabe: Berechne $z = \sqrt[3]{1+i}$

Grundwissen: Es gibt drei komplexe Wurzelwerte.
Formeleingabe:
>> z0 = (1+i)^(1/3)
z0 = 1.0842 + 0.2905i

Nachteil: Es wird nur der *Hauptwert* der Wurzel berechnet.

Grundwissen: Die Wurzeln liegen in der komplexen Ebene gleichmäßig verteilt auf einem Kreis.

Ergänzung der Eingabe:
>> d = exp(i*2*pi/3) ; % Drehfaktor (Winkel 2π/3)
>> z1 = d * z0; z2 = d * z1; % Wurzelwerte zwei und drei
>> zv = [z0 z1 z2] % Vektor der Wurzelwerte
zv = 1.0842 + 0.2905i
–0.7937 + 0.7937i
–0.2905 – 1.0842i

Grundwissen: Die Wurzeln sind die Nullstellen des Polynoms $P(z) = z^3 - 1 - i$.

Alternative:
>> p = [1 0 0 –1–i]; % Koeffizientenvektor Polynom
>> zva = roots(p) % Vektor der Nullstellen
zva = –0.2905 – 1.0842i
1.0842 + 0.2905i
–0.7937 + 0.7937i

Hinweis: Die Reihenfolge der Wurzeln ist hier anders.

Grundwissen: Komplexe Zahlen sind als Punkte bzw. Zeiger in der komplexen Zahlenebene darstellbar.

Grafische Darstellung (Abbildung 1):
>> compass(zv) % polare Darstellung

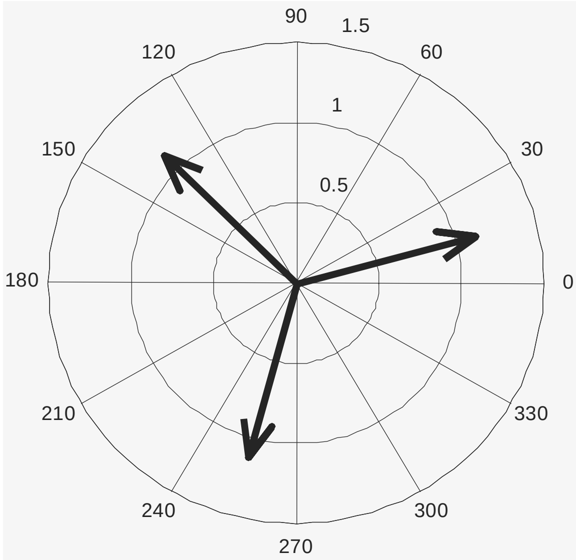

Abbildung 1: Lage der komplexen Wurzeln.

INVERTIERUNG VON MATRIZEN

Aufgabe: Invertiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

und ihre Produkte mit der transponierten Matrix $B = A A^T$, $C = A^T A$.

Eingabe und Erzeugung der Matrizen:
>> A = [1 –2 1 -3; 2 -1 3 0; 3 0 1 -1];
>> B = A * A‘, C = A‘ * A

Man erhält in mathematischer Notation

$$B = \begin{pmatrix} 15 & 7 & 7 \\ 7 & 14 & 9 \\ 7 & 9 & 11 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 10 & -6 \\ -4 & 5 & -5 & 6 \\ 10 & -5 & 11 & -4 \\ -6 & 6 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Grundwissen: Inverse existieren nur für quadratische Matrizen mit einer Determinante ungleich 0 (reguläre Matrizen). Singuläre oder fast singuläre Matrizen kann man numerisch nicht invertieren.

Versuch zur Invertierung von A:
>> IA = inv(A)
?? Fehler: Die Matrix muss quadratisch sein.

Folgerung: Die Inverse von A existiert nicht.

Zusatzwissen: Zu jeder Matrix A existiert (genau) eine Pseudoinverse (verallgemeinerte Inverse) A^+.
>> PIA = pinv(A) % Pseudoinverse A^+ von A

Man erhält (unter Beibehaltung des Dezimalpunktes)

$$PIA \to A^+ = \begin{pmatrix} -0.0798 & -0.0532 & 0.3670 \\ -0.1755 & -0.1170 & 0.2074 \\ -0.0053 & 0.3298 & -0.1755 \\ -0.2447 & 0.1702 & -0.0745 \end{pmatrix}.$$

Wer vermutet, dass die Elemente der Pseudoinversen A^+ von A rational sind, kann sich die rationale Form anschauen:
>> format rat % Einstellung des rationales Zahlenformates
>> PIA
Es folgt

$$PIA \to A^+ = \begin{pmatrix} -15/188 & -5/95 & 69/188 \\ -33/188 & -11/94 & 39/188 \\ -1/188 & 31/94 & -33/94 \\ -23/94 & 8/94 & -7/94 \end{pmatrix}.$$

>> format % Rückstellung auf das Standardformat
Invertierung von B:
>> IB = inv(B)
Man erhält

$$IB \to B^{-1} = \begin{pmatrix} 0.0971 & -0.0186 & -0.0465 \\ -0.0186 & 0.1543 & -0.1144 \\ -0.0465 & -0.1144 & 0.2141 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Da die Elemente der Inversen als Quotient zweier ganzzahliger Determinanten darstellbar sind, müssen die Elemente von B^{-1} rational sein. Wie oben beschrieben, kann man sich die rationale Form anzeigen lassen.

Invertierung von C:
>> IC = inv(C) % Inverse von C
!! Warnung: Die Matrix ist fast singulär oder schlecht skaliert, die Ergebnisse können ungenau sein, die reziproke Kondition beträgt RCOND = 4.168547e-018.

$$IC = 1.0e+015*$$
$$\begin{matrix} 0.6005 & -1.5012 & -0.9007 & 0.9007 \\ -1.5012 & 3.7530 & 2.2518 & -2.2518 \\ -0.9007 & 2.2518 & 1.3511 & -1.3511 \\ 0.9007 & -2.2518 & -1.3511 & 1.3511 \end{matrix}$$

Bemerkung: Die Elemente der Matrix sind extrem groß. (Der Vorfaktor 10^{15} wird von Studenten teilweise übersehen.) Die Zahl RCOND ist extrem klein.
Hilfe:
>> help RCOND
Grundwissen: Eine sehr kleine reziproke Konditionszahl weist darauf hin, dass die Invertierung ein sehr schlecht gestelltes Problem ist (große Fehlerverstärkung).
Folgerung: Das Ergebnis für die Inverse ist *praktisch unbrauchbar*.
Grundwissen:

- Mit Hilfe der Determinante oder des Ranges einer Matrix kann man entscheiden, ob sie invertierbar ist.
- Das Produkt der Matrix und der inversen Matrix ergibt (unabhängig von der Reihenfolge der Faktoren) die Einheitsmatrix.
- Für eine invertierbare (bzw. reguläre) Matrix stimmen die Inverse und die Pseudoinverse überein.
- Der Nullraum der Matrix (Lösungsmenge von $A\vec{x} = \vec{0}$) darf nur den Nullvektor enthalten, wenn die Matrix invertierbar ist.
- Bei numerischen Rechnungen können Ergebnisverfälschungen auftreten (Determinante, Rang, Nullraum).

Weitere Experimente:
>> DC = det(C) % Determinante von C
DC = 0
>> RC = rank(C) % Rang von C
RC = 3
>> format rat % rationales Zahlenformat
>> EC1 = IC * C % Einheitsmatrix?

$$EC1 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3/2 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

>> EC2 = C * IC % Einheitsmatrix?

$$EC2 \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

>> format % Standardformat
>> PIC = pinv(C) % Pseudoinverse von C

$$PIC \to \begin{pmatrix} 0.1439 & 0.0964 & -0.0815 & -0.0169 \\ 0.0964 & 0.0875 & -0.0741 & 0.0076 \\ -0.0815 & -0.0741 & 0.1396 & 0.0705 \\ -0.0169 & 0.0076 & 0.0705 & 0.0944 \end{pmatrix} \neq IC.$$

>> NC = null(C) % Nullraum von C

$$NC \to \begin{pmatrix} -0.2917 \\ 0.7293 \\ 0.4376 \\ -0.4376 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Folgerung: Die Inverse von C existiert nicht oder ist numerisch nicht berechenbar.
Hinweis: Endgültige Klarheit kann man mit Handrechnung oder unter Nutzung der Computeralgebra gewinnen.
Symbolische (exakte) Rechnung:

>> CS = sym(C) % C als symbolische Matrix
>> ICS = inv(CS) % Inverse von C
?? Fehler: Die inverse Matrix ist singulär.
>> dCS = det(CS) % Determinante von C
dCS = 0
>> rCS = rank(CS) % Rang von C
rCS = 3
>> PICS = pinv(CS) % Pseudoinverse von C
?? Fehler: Der Aufruf der Funktion svd (Singulärwertzerlegung) funktioniert nicht korrekt. Die Funktion pinv ist für symbolische Matrizen nicht anwendbar.

Hinweis: Funktionen haben meist im numerischen und symbolischen Modus eine entsprechende Bedeutung. Das gilt aber nicht immer. Die Berechnungsverfahren bleiben dem Nutzer in der Regel verschlossen.

Zusammenfassung: Die Matrix B ist invertierbar. Die Matrizen A und C sind nicht invertierbar. Als Ersatz kann man hier Pseudoinverse bestimmen. Überraschenderweise liefert die numerische Rechnung trotzdem eine (unbrauchbare) Inverse.

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Bedeutung: Lineare Gleichungssysteme sind die einfachsten Aufgaben der mehrdimensionalen Analysis. Ihre Lösung gehört zu den Grundaufgaben der Mathematik.

Aufgabe: Löse das lineare Gleichungssystem

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \quad (A \in R^{m,n}, \vec{b} \in R^m, \vec{x} \in R^n).$$

Standardanweisung zur Lösung
>> x = A \ b % Linksdivision
Alternativen
>> x = inv(A) * b % Verwendung der Inversen
>> x = pinv(A) * b %Verwendung der Pseudoinversen
Fallen

- Die Anweisungen können Ergebnisse liefern, die keine Lösungen sind, oder Fehlermeldungen produzieren;
- Für Systeme mit mehreren Lösungen wird von den Anweisungen nur eine *spezielle Lösung* berechnet;
- Die Anweisung A \ b funktioniert für quadratische Matrizen nur im regulären Fall. Sie liefert (allgemeiner) eine *Kleinste-Quadrate-Lösung*;
- Die Anweisung inv(A) * b funktioniert nur im quadratischen regulären Fall;
- Die Anweisung pinv(A) * b liefert die *Kleinste-Quadrate-Lösung* mit dem kleinsten Betrag.

Verwechslung
>> x = A / b % Rechtsdivision
?? Fehler: Die Formate stimmen nicht.

Grundwissen: Es gibt drei mögliche *Lösbarkeitsfälle*: a) keine Lösung, b) genau eine Lösung, c) unendliche viele Lösungen. Welcher Fall vorliegt, kann man durch *Ranguntersuchungen* klären. Im Fall c) besteht die allgemeine Lösung aus einer speziellen Lösung und den Linearkombinationen der (linear unabhängigen) Basislösungen des homogenen Systems

$$A\,\vec{x} = \vec{0}.$$

Im unlösbaren Fall kann man Kleinste-Quadrate-Lösungen als *Lösungsersatz* ansehen (Approximation nach der Methode der kleinsten Quadratsumme, Minimierung des Defektbetrages). Da diese Lösungen des modifizierten linearen Gleichungssystems

$$A^T A\,\vec{x} = A^T \vec{b}$$

sind, haben sie wieder die erwähnte Struktur.

Überprüfung der Lösbarkeit:
>> rank(A) == rank([A b]) % Probe a priori (vorher)
>> det(A) % bei quadratischen Matrizen
>> A * x == b % Probe a posteriori (nachher)
>> norm(b − A * x) % Defektbetrag
>> abs(b − A * x) % Beträge der Defektkoordinaten

Hinweis: Im Gegensatz zu der Zuweisung = realisiert == in *Matlab*-Anweisungen den logischen Test auf Gleichheit. Bei positiver Antwort wird 1 und sonst 0 ausgegeben.

Bestimmung der Lösungen/Kleinste-Quadrate-Lösungen:

Spezielle Lösung/Kleinste-Quadrate-Lösung
>> x = A\b % A nicht quadratisch oder A regulär
>> x = pinv(A) * b
Weitere Lösungen/Kleinste-Quadrate-Lösungen
>> null(A) % Spalten sind Orthonormalsystem von Basislösungen des homogenen Systems
Beispiel: Löse

$$A = \begin{pmatrix} 14 & -4 & 10 & -6 \\ -4 & 5 & -5 & 6 \\ 10 & -5 & 11 & -4 \\ -6 & 6 & -4 & 10 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Datenerzeugung
>> A = C; % A übernimmt die Elemente von C
>> b = [1; 1; 1; 1]; % Spaltenvektor b
Überprüfung der Lösbarkeit / Rangtest
>> RAe = rank([A b])
RAe = 4

Hinweis: Wir wissen schon aus dem vorigen Abschnitt (siehe Matrix C), dass A singulär ist und den Rang 3 besitzt. Daher gibt es wegen des Rangunterschiedes *keine Lösung*. Überraschenderweise liefert der Standardbefehl ein unbrauchbares

Resultat ohne eine Fehlermeldung oder eine Warnung:

```
>> x1 = A \ b
x1 = 1.0e+015 *    % riesiger Vorfaktor 10^15
    -0.9007        % Vektorkoordinaten
     2.2518
     1.3511
    -1.3511
```

Bestimmung der Kleinste-Quadrate-Lösungen

Mit den Befehlen
>> x2 = pinv(A) * b % spezielle Kleinste-Quadrate-Lösung
>> NA = null(A) % Basislösungen des homogenen Systems
erhält man die Menge der Kleinste-Quadrate-Lösungen

$$x = \begin{pmatrix} 0.1419 \\ 0.1174 \\ 0.0545 \\ 0.1556 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -0.2917 \\ 0.7293 \\ 0.4376 \\ -0.4376 \end{pmatrix}$$

mit dem reellen Parameter λ. Wer sich hier mathematisch nicht auskennt, der berechnet Unsinn (siehe oben).

UNENDLICHE REIHEN

Grundwissen: Der Reihenwert (Summe) ist der Grenzwert der Partialsummenfolge der Reihe. Die Reihe kann konvergent (endlicher Reihenwert), bestimmt divergent (Reihenwert $+\infty$ oder $-\infty$) oder unbestimmt divergent (kein Reihenwert) sein.

Zusatzwissen: Mit Hilfe von Summationsverfahren kann man für Reihen einen verallgemeinerten Wert definieren.

Aufgabe: Berechne die Reihen(summen)

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^n} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}, \quad d)\ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k.$$

Symbolische Berechnung

Standardfunktion: symsum (Symbolische Toolbox)
>> syms k n ; % Vereinbarung der symbolischen Größen

Reihe a)
erster Versuch
>> symsum(1/k^n,1,inf)
ans = 1/(k-1)

Hinweis: Dieses Ergebnis kann offensichtlich nicht stimmen. Eine Zusatzüberlegung zeigt, dass es sich um das Ergebnis der Reihe b) handelt (siehe unten).

Versuch mit n=1 % harmonische Reihe
>> symsum(1/k,1,inf)
ans = inf % Reihenwert unendlich

Versuch mit n=2
>> symsum(1/k^2,1,inf) % Reihensumme
ans = 1/6 * pi^2 % bekanntes Ergebnis $\pi^2/6$
>> symsum(1/k^2,1,n) % Partialsumme von 1 bis n
ans = - Psi(1,n+1) + 1/6 * pi^2 % spezielle Funktion Ψ

Versuch mit n=3
>> symsum(1/k^3,1,inf) % Reihensumme
ans = zeta(3) % Riemannsche Zetafunktion
letzter Versuch
>> s1 = symsum(1/k^n,k,1,inf) % Angabe des Laufindexes k
s1 = zeta(n) % allgemeines Ergebnis

Reihe b) % geometrische Reihe
>> s2 = symsum(1/k^n,n,1,inf) % Angabe des Laufindexes n
s2 = 1/(k-1) % Reihenwert für k $\neq$ 1

Versuch mit k=1
>> s2a = symsum(1/1^n,n,1,inf)
s2a = inf % Reihenwert unendlich

Hinweis: Der Laufindex kann hier weggelassen werden.

Reihe c)
>> s3 = symsum(1/k^k,1,inf)
!! kein Ergebnis: Die Reihe wird unverändert zurückgegeben.

Hinweis: Die Reihe c) ist konvergent. Ab k=3 wird sie von einer konvergenten geometrische Reihe (summandenweise) majorisiert (siehe Reihe b) mit k=2):

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^k} < \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{4}.$$

Reihe d)
>> s4 = symsum((-1)^k,0,inf)
s4 = 1/2

Hinweis: Die Reihe d) ist offensichtlich divergent. Nach dem Summationsverfahren von ABEL besitzt sie den verallgemeinerten Wert ½. Das ist der Mittelwert der Partialsummenfolge, die abwechselnd die Glieder 1 und 0 hat.

UNBESTIMMTE INTEGRATION

Grundwissen: Funktionen f, die als Ableitung von anderen Funktionen F auftreten, sind unbestimmt integrierbar. Die Funktionen F heißen *Stammfunktionen* von f. Zwei beliebige Stammfunktionen einer Funktion f unterscheiden sich nur um eine Konstante. Das unbestimmte Integral von f ist die

Menge aller Stammfunktionen von f:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad (C \in R \quad beliebig)$$

Aufgabe: Bestimme

$$a)\ \int \frac{1}{x^4 + 4x + 1}\,dx, \quad b)\ \int (\arcsin x)^2\,dx.$$

Grundwissen: Der Integrand in a) ist eine rationale Funktion. Das Integral ist daher prinzipiell nach *Partialbruchzerlegung* durch Integration der Partialbrüche berechenbar.

Zusatzwissen: Macht man in b) die Substitution x = sin t, so ist das Integral durch partielle Integration leicht lösbar.

Symbolische Berechnung

Standardfunktion: int (Symbolische Toolbox)

>> syms x ; % Vereinbarung der symbolischen Größe

Integral a)

>> int(1/(x^4 + 4*x + 1)) % symbolische Integration

ans = sum(_R*log(x-14976*_R^3+1248*_R^2+544*_R+27), _R = RootOf(6656*Z^4--288*_Z^2-32*_Z-1))

Erläuterung: Das Ergebnis wird als Ausdruck einer Nullstelle eines Polynoms vierten Grades angegeben.

Ergänzung:

>> solve('x^4+4*x+1=0') % symbolische Berechnung der Nullstellen des Nennerpolynoms im Integranden

Hinweis: Es erscheinen schrecklich lange Ausdrücke, die beim besten Willen nicht angegeben werden können. Die numerische Berechnung liefert Näherungswerte für die Nullstellen.

>> p = [1 0 0 4 1]; % Koeffizienten des Polynoms

>> r = roots(p)

r = 0.8722 + 1.3810i
0.8722 - 1.3810i
- 1.4934
- 0.2510

Fortsetzung: Nutzt man diese Näherungswerte, so lässt sich das Integral näherungsweise mit dem entsprechenden Partialbruchansatz leicht bestimmen.

Integral b)

>> int(asin(x)^2)

!! kein Ergebnis: Das Integral wird unverändert zurückgegeben. Trotzdem besitzt es Stammfunktionen (siehe oben).

Fortsetzung:

% Integration nach der Substitution x = sin t

>> syms t;

>> g = t^2 * cos(t); % Integrand nach Substitution

>> It = int(g,t)

It = t^2 * sin(t) – 2 * sin(t) + 2 * t * cos(t)

>> Ix = subs(It,t,asin(t)) % Rücksubstitution

Ix = asin(x)^2 * x - 2 * x + 2 * asin(x) * (1 - x^2)^(1/2)

Hinweis: Zum letzten Ergebnis ist noch eine beliebige Integrationskonstante hinzuzufügen (siehe oben).

BESTIMMTE INTEGRATION

Aufgabe: Berechne

$$a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx, \quad b)\ \int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx, \quad c)\ \int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\quad dydx.$$

Grundwissen: Die Integrale in a) und b) bestimmt man mit Hilfe von Grenzwertbetrachtungen (unendliches Integrationsintervall, unbeschränkter Integrand). Da die Teilflächen im positiven Bereich unendlich sind, existieren die Integrale nicht. Das Integral in c) ist ein Doppelintegral über einen endlichen Bereich und mit einem stetigen positiven Integranden. Es hat einen endlichen Wert, der sich als Volumen eines Körpers deuten lässt.

Symbolische Berechnung

Standardfunktion: int (Symbolische Toolbox)

>> syms x y; % Vereinbarung der symbolischen Größen

Integral a)

>> Ia = int(x, -inf,inf)

!! Ergebnis: Das (uneigentliche) Integral ist nicht definiert.

Hinweis: Offensichtlich existiert das Integral nicht.

Integral b)

>> Ib = int(1/x, -1,1)

!! kein Ergebnis: Das Integral wird unverändert zurückgegeben.

Hinweis: Das (uneigentliche) Integral existiert nicht.

Zusatzwissen: Der CAUCHYsche Hauptwert der Integrale a) und b) ist jeweils 0.

Erkenntnis: Die allgemeinere Deutung des Integrals als Hauptwert wird von *Matlab* (bisher) nicht berücksichtigt.

Integral c)

>> Icy = int(sqrt(x^2+y^2),y,0,sqrt(9-x^2));
% inneres Integral

>> Ic = int(Icy,x,0,3) % äußeres Integral

!! kein Endergebnis: Nur das innere Integral wird berechnet.

Geometrische Interpretation: Bei genauerer Betrachtung erkennt man, dass das Integral das Volumen einer Achtelkugel mit dem Mittelpunkt (0,0,0) und dem Radius 3 darstellt. Dieses Volumen kann man elementargeometrisch leicht bestimmen. Man erhält

$$V = \frac{9}{2}\pi.$$

Polarkoordinaten: Die naheliegende Substitution lautet

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Das Integral c) bekommt dann die Form

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 r^2 \, dr \, d\varphi .$$

Fortsetzung der Berechnung

```
>> syms r phi;
>> Ir = int(r^2,r,0,3);        % innere Integration
>> I = int(Ir,phi,0,pi/2)      % äußere Integration
I = 9/2 * pi                   % Ergebnis (siehe oben)
```

POLYNOMNULLSTELLEN

Aufgabe: Bestimme die Nullstellen von

$$P(x) = 2030x^4 - 5741x^3 - x^2 + 11482x - 8118$$

numerisch, symbolisch (exakt) und grafisch.

Grundwissen: Das Polynom hat vier Nullstellen, die jedoch zusammenfallen oder komplex sein können. Komplexe Nullstellen treten paarweise auf.

Nullstellen numerisch (Abbildung 2):

```
>> p = [2030 -5741 -1 11482 -8118]; % Koeffizienten von P
>> xn = roots(p)    % Nullstellen von P
xn = -1.4142  1.4143  1.4142 1.4183
```

Nullstellen symbolisch

```
>> solve('2030*x^4-5741*x^3-x^2+11482*x-8118=0')
x = [99/70] [41/29] [2^(1/2)] [-2^(1/2)]  % Nullstellen von P
```

Nullstellen grafisch (mit Lupe)

```
>> x1 = linspace(-2,2); % Stellenliste aus [-2,2]
>> y1 = polyval(p,x1); % Liste der Polynomwerte
>> x2 = linspace(1.41375,1.41435); % Stellenliste
>> y2 = polyval(p,x2); % Liste der Polynomwerte
% Teilbildpalette vom Format 1x2 mit Einsatz einer Lupe
>> subplot(1,2,1)    % Teilbild links
>> plot(x1,y1), grid % erster Teilgraph, Gitter
>> subplot(1,2,2)    % Teilbild rechts
>> plot(x2,y2,41/29,0,'O',sqrt(2),0,'O',99/70,0,'O') , grid
    % zweiter Teilgraph, Gitter
>> axis([1.41375 1.41435 –1e-7 1e-7])  % Achsenausschnitt
```

Hinweis: Es ist sinnvoll, diese Befehlsfolge als m-Datei anzulegen und abzuspeichern.

Schlussfolgerung: Das Polynom hat vier reelle Nullstellen. Die Werte der drei positiven Nullstellen liegen sehr dicht beieinander, fallen jedoch nicht zusammen. Numerisch und grafisch sind sie nur schwer zu trennen. Die Lupen in der Abbildung sind von der Kenntnis der exakten Nullstellen beeinflusst.

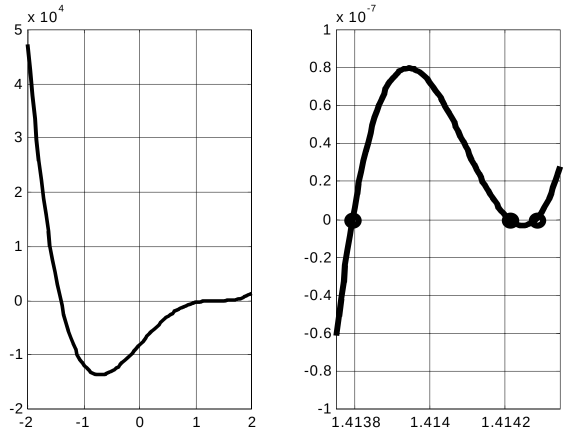

Abbildung 2: Nullstellen eines Polynoms.

Schlussfolgerung: Das Polynom hat vier reelle Nullstellen. Die Werte der drei positiven Nullstellen liegen sehr dicht beieinander, fallen jedoch nicht zusammen. Numerisch und grafisch sind sie nur schwer zu trennen. Die Lupen in der Abbildung sind von der Kenntnis der exakten Nullstellen beeinflusst.

UNSTETIGKEITEN VON FUNKTIONEN

Aufgabe: Untersuche die Funktion

$$z = f(x,y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 \neq 0), \quad f(0,0) = 0$$

in der Nähe der Stelle (0,0).

Hinweis: Die Funktion f wird in der Literatur oft zitiert (siehe u.a. [4]). Sie ist außerhalb von (0,0) stetig und beliebig oft differenzierbar. Nach Einführung von Polarkoordinaten (r,j) folgt

$$z = \sin 2\varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi)$$

unabhängig von r. Für festes j (Halbgerade) sind die Werte z alle gleich. Für festes r wechseln sich auf einem Kreis um (0,0) Berg und Tal zwischen den Niveaus -1 und 1 ab. Daher nimmt f in jeder (noch so kleinen) Umgebung von (0,0) sämtliche Werte zwischen -1 und 1 an. Die Funktion ist also an der Stelle (0,0) nicht stetig und erst recht nicht differenzierbar. *Matlab* liefert anschauliche Vorstellungen von f.

Grafische Darstellung (Abbildung 3):

```
x = linspace(-1,1); [X,Y] = meshgrid(x); % Bereichsausschnitt

Z = 2*X.*Y./(X.^2+Y.^2); % Definition der Funktion
subplot(1,2,1)              % Teilbild links
surf(X,Y,Z), view(-30,20)   % Raumfläche, Blickrichtung
axis('equal')               % einheitlicher Achsenmaßstab
subplot(1,2,2)              % Teilbild rechts
pcolor(X,Y,Z), axis('equal') % Niveaudarstellung
```

REFERENZEN

1. Abel, D., *Matlab* und CES – Interdisziplinärer Studiengang *Computational Engineering Science* an der RWTH Aachen. *Matlab Select*, 1, 5-5 (2004).
2. Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Sonderheft. 12, **2** (2004).
3. Schott, D., *Ingenieurmathematik mit* Matlab, *Algebra und Analysis für Ingenieure* (1. Auflage). Leipzig: Carl Hanser Verlag (2004).
4. http://www.et.hs-wismar.de/~schott/IngMat/
5. Benker, H., *Mathematik mit* Matlab, *Eine Einführung für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Berlin: *Springer-Verlag* (2000).

BIOGRAPHIE

Dieter Schott ist Professor für Numerische Mathematik und Technische Mechanik am Fachbereich Elektrotechnik und Informatik der Hochschule Wismar. Er beendete das Mathematikstudium an der Universität Rostock 1972 mit dem Diplom. Er promovierte 1976 und habilitierte sich 1982 auf dem Gebiet der Mathematik. Vor seiner Berufung an die Hochschule Wismar war er als Dozent an der Pädagogischen Hochschule Güstrow und an der Universität Rostock tätig. Dabei war er an der Ausbildung künftiger Naturwissenschaftler, Lehrer und Ingenieure beteiligt. Seine zahlreichen Publikationen

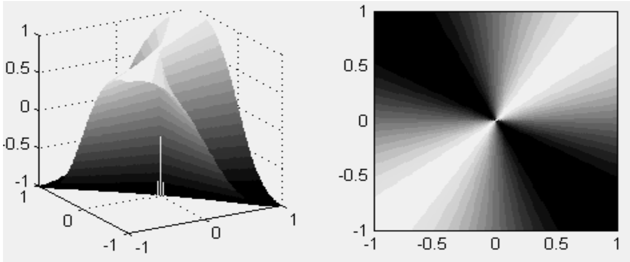

Abbildung 3: Unstetigkeit einer Funktion im Ursprung.

liegen vor allem im Bereich der Numerischen Analysis und der Mathematikausbildung von Ingenieuren. Im Jahre 2004 erschien sein Lehrbuch Ingenieurmathematik mit *Matlab*, indem eine Synthese von mathematischer Theorie und Computereinsatz realisiert wird.

Prof. Schott engagiert sich für eine moderne Mathematikausbildung einschließlich des Einsatzes elektronischer Medien und fördert die internationale Kooperation durch fachliche Betreuung ausländischer Studenten.

Prof. Schott ist seit dem Jahre 2000 einer der beiden Direktoren des Gottlob-Frege-Zentrums der Hochschule Wismar, das sich national mit der Organisation von Workshops zur Ingenieurmathematik und lernender Regionen sowie international als Satellitenzentrum der Ingenieurorganisation *UNESCO International Centre for Engineering Education* (UICEE) einen Namen gemacht hat. Er ist durch Vortragstätigkeit, Publikationen, Gutachtertätigkeit und Organisation von Tagungen tief mit der Arbeit des UICEE verwurzelt. Im Jahre 2002 erhielt er für außerordentliche Beiträge zur Ingenieurausbildung und ihrer Globalisierung die Auszeichnung UICEE *Silver Badge of Honour.*