Global J. of Engng. Educ., Vol.8, No.3
Published in Australia

Zur Integralrechnung in der Ingenieurmathematik

Raimond Strauß
Universität Rostock, Fachbereich Mathematik
Universitätsplatz 1, D-18055 Rostock, Deutschland

Die Integralrechnung ist ein konstanter Teil der Ingenieurmathematik, der relativ unverändert gelehrt wird. Es wird ein Vorschlag zu einer einheitlichen Behandlung von Anwendungen der Integralrechnung gemacht, der Zeit spart, aber im Gegenzug mehr Aufwand an linearer Algebra erfordert.

EINLEITUNG

Die Vorlesungen zur Ingenieurmathematik sind im Umbruch. Auf der einen Seite stehen die Diskussion um Bachelor- und Masterabschlüsse im Rahmen einer Internationalisierung der Ausbildung [1][2]. Auf der anderen Seite sind inhaltliche Änderungen und Anpassungen der Vorlesungsschwerpunkte an die praktischen und theoretischen Erfordernisse ein ständiger Prozess. Unabhängig von der Form der Abschlüsse und den Bedingungen, die man als Lehrender vorfindet, ist der Tendenz der umfassenden Mathematisierung aller Lebensbereiche Rechnung zu tragen. Der Vorgang ist objektiv und damit unabhängig von Wünschen und Meinungen, ja sogar vom Handeln des Einzelnen. Er wird durch die Entwicklung der Informatik und die damit einhergehende Ausbreitung des Computers befördert.

Die Arbeit von Ingenieuren ist ohne Computer kaum denkbar. Dadurch gibt es neue mathematische Themenbereiche, die für die Berufsvorbereitung der Ingenieure von Bedeutung sind. Die Vorlesungen Mathematik für Ingenieure sind gewöhnlich sehr kompakt. Es wird sehr viel Wissen vermittelt. Die Studierenden sind nicht selten überfordert. Sollen neue Themen berücksichtigt werden, braucht man mehr Zeit oder es müssen alte Themen weichen. Welche Themen kann man streichen? Am ehesten die, die durch die langen Schuljahre abgedeckt sein sollten. Ein Beispiel sind Teile der Analysis für Funktionen einer reellen Veränderlichen. Wie die PISA-Studien und andere Analysen [3][4] lehren, ist das Streichen der Themen hier und jetzt nicht ratsam. Die Konsequenz muss eine Verlängerung der Zeiten für Mathematik in den Curricula sein. Aus verschiedenen Gründen ist sie es aber nicht. Das ist gefährlicher für die Zukunft des Industriestandortes als andere oft überschätzte Standortfaktoren. Trotzdem bekommt man in der Regel nicht mehr Zeit für die obligatorische Vorlesung. Es ist anscheinend unbekannt oder uninteressant, dass Hochtechnologie ohne Mathematik undenkbar ist. Wer Hochtechnologie produzieren möchte, braucht dementsprechend ausgebildete Ingenieure. Von der Industrie wird ein sehr großer Wert auf eine fundierte mathematische Ausbildung gelegt. Durch mehr Mathematik können die Absolventen ihre Chancen auf dem Arbeitsmarkt verbessern. Interessanterweise wissen die Studenten das sehr genau. Deshalb werden freiwillige Zusatzkurse (vgl. [5]) von den Studenten auch dann gut besucht, wenn sie für die Erlangung des Diploms keine Bedeutung haben. In dieser Arbeit wird ein dritter Weg vorgeschlagen, der eine Steigerung des theoretischen Niveaus und der praktischen Anwendbarkeit durch Umgewichtung der Vorlesungsinhalte bewirken soll. Die Stoffauswahl wird zugunsten der linearen Algebra verschoben. Dahinter steckt die Grundidee, mehr lineare Algebra zu verwenden, um traditionelle Themen auf höherem Niveau schneller und einfacher zu behandeln [6]. Diese Idee wird nicht in allen Details ausgeführt und ist teilweise in der Begründung des Ergänzungskurses [5] zu finden. Am Beispiel der Integralrechnung werden Vorteile und Konsequenzen aufgezeigt. Die Integralrechnung wird zwar nicht einfacher, aber es gelingt leicht, die Transformationsformel für Bereichsintegrale zu begründen. Das wurde bisher meist nicht getan und ist ein Ziel der Arbeit [7]. Durch eine Verallgemeinerung der Transformationsformel lassen sich bekannte Formeln für Kurven- und Oberflächenintegrale auf dem Vorlesungsniveau für Ingenieure herleiten. Das ist eine etwas unübliche Vorgehensweise, um die Integrale über Untermannigfaltigkeiten zu erklären. Außerdem gelingt die Übertragung von Begriffen in den n-dimensionalen Raum mühelos. Dadurch wird für die Ingenieurmathematik ein Fortschritt erreicht, der auch ein Vorhaben der vorliegenden Arbeit ist. Die Darstellungen sind zwar anschaulich, aber mathematisch teilweise naiv. Alle Ergebnisse gelten allgemeiner und lassen sich eleganter darstellen. In einer durchschnittlichen Vorlesung zur Ingenieurmathematik ist das aber nicht erreichbar.

INTEGRALRECHNUNG

Der Abschnitt Integralrechnung ist für verschiedene Ingenieurfächer unterschiedlich in Umfang und Tiefe des vermittelten Wissens. Einige Inhalte sind allen gemein. Ein durchschnittlicher Kurs sieht bis auf kleinere Änderungen wie folgt aus.

- Das unbestimmte Integral;
- Das bestimmte (Riemann'sche) Integral;
- Anwendungen der Integralrechnung;
- Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale;
- Uneigentliche Integrale;
- Parameterintegrale;
- Ebene Bereichsintegrale;
- Räumliche Bereichsintegrale;
- Anwendungen mehrdimensionaler Integrale;
- Transformation von Bereichsintegralen.

Zu den Anwendungen gehören Flächen-, Volumenberechnungen, Berechnungen von Bogenlängen und Oberflächen. Sie sind mit technischen Begriffen wie Masse und Ladung von entsprechend Körpern, Flächen oder Kurven verbunden und in der Ausbildung unverzichtbar. Ihre Herleitung erfolgt über Riemannsche Summen. Das ist nicht unproblematisch und hinreichend kompliziert, wie die Integration über Oberflächen zeigt [8]. Das ist zeitaufwendig und für die Studierenden eher langweilig. Es handelt sich um Integrale über Mannigfaltigkeiten. Wenn man über k-dimensionale Mannigfaltigkeiten im n-dimensionalen Raum integrieren will, gibt es verschiedene Methoden, um das zu bewerkstelligen. Die übliche Vorgehensweise benutzt Untermannigfaltigkeiten mit Karten und Atlas, die entsprechenden Tangentialräume und Diffeomorphismen. Dieser Zugang findet implizit Berücksichtigung.

Einen mengentheoretischen Zugang zu Maßen in verschiedenen Dimensionen liefert das Hausdorff'sche Maß. Es ist wesentlich allgemeiner verwendbar und soll hier keine Rolle spielen.

Die genannten Begriffe sind im engen Zeitrahmen durchschnittlicher Vorlesungen zur Ingenieurmathematik nicht vermittelbar. Hier wird ein vereinfachter Zugang vorgeschlagen, dem das Jordan'sche Maß wie beim ersten genannten Zugang zugrunde liegt.

Die Transformationsformel für Bereichsintegrale ist im Folgenden der zentrale Punkt.

DIE TRANSFORMATIONSFORMEL

Diese Formel ist für Studenten schwer verständlich, da sie meist ohne Begründung angegeben und nur in wichtigen Spezialfällen wie Polar-, Kugel- und Zylinderkoordinaten verwendet wird. Aus praktischen Gründen für die Darstellung werden die folgenden Überlegungen nicht im $\Re^3$ sondern im $\Re^n$ stattfinden.

Es sei $G \subset \Re^n$ ein beschränktes, abgeschlossenes einfach zusammenhängendes Gebiet mit hinreichend glattem Rand.

Bemerkung 1: Es gibt für die Existenz des Riemann'schen Integrals sehr präzise Aussagen, die hier genannt werden sollen. Es wird (mindestens) gefordert, dass das Gebiet G Jordan-messbar ist. Ein abgeschlossenes Gebiet heißt auch Bereich. Das ist genau dann der Fall, wenn eine der Bedingungen er füllt ist:

- Es existiert eine gegen G konvergente Überdeckungsfolge für G durch Elementarbereiche (Darboux). (Als Elementarbereiche dienen Parallelepipeda oder noch einfacher n-dimensionale Intervalle. Wichtig ist, dass man ihren Inhalt einfach berechnen kann.)
- Der Rand der beschränkten Menge G ist eine Menge vom Maß Null.

Die Funktionen sollen über G Riemann-integrierbar sein, was für Jordan-meßbare Mengen G genau dann der Fall ist, wenn $f : \Re^n \mapsto \Re$ auf G beschränkt und fast überall stetig ist (Kriterium von Lebesgue).

Für $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in G$ sei die Dichtefunktion $f(x)$ stetig. Dann existiert das Gebietsintegral

$$\int_G f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

Der Bereich $B \subset \Re^n$ lasse sich durch $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$, also

$$\begin{aligned} x_1 &= \Phi_1(u_1, u_2, ..., u_n) \\ x_2 &= \Phi_2(u_1, u_2, ..., u_n) \\ &\vdots \\ x_n &= \Phi_n(u_1, u_2, ..., u_n) \end{aligned}$$

bijektiv auf den Bereich $G \subset \Re^n$ abbilden. Es wird vorausgesetzt, dass die Funktionen Φ_i in B stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitzen und die Funktionaldeterminante

$$det\, J_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u}) = det\left(\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_i}{\partial u_j}\right)_{i,j=1}^{n}\right)$$

für kein $\boldsymbol{u}$ aus dem Bereich B verschwindet. Mit anderen Worten die Jacobimatrix $J_{\boldsymbol{\Phi}}$ hat in jedem Punkt $\boldsymbol{u}$ von B den vollen Rang n. In diesem Fall gilt die Formel

$$\int_G f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_B (f \circ \boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{u}) \left|det(J_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u}))\right| d\boldsymbol{u} \quad (1)$$

mit $G = \boldsymbol{\Phi}(B)$. Das Auftreten der Funktionaldeterminante in (1) wird in den Vorlesungen oft mit dem Auftreten der Ableitung in der Substitutionsregel für eindimensionale Integrale verglichen. Obwohl Beispiele angegeben werden, bleibt sie den Studierenden rätselhaft, da auf den Beweis verzichtet wird. Einen elementaren Beweis für den Fall der Transformation von kartesischen in krummlinige Koordinaten findet man im Smirnow [9].

Man kann (1) äquivalent in der Form

$$\int_G f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_B (f \circ \boldsymbol{\Phi})(\boldsymbol{u}) \sqrt{det(J_{\boldsymbol{\Phi}}^T(\boldsymbol{u})\, J_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u}))}\, d\boldsymbol{u} \quad (2)$$

schreiben. Das ist eine triviale Umformung, die sich aber für das Weitere als fruchtbar erweist. Hier soll für (1) eine Erklärung gebracht werden, die für die Ingenieurmathematik geeignet ist. Zunächst wird auf den Zusammenhang von Determinanten und Volumen eingegangen und dann wird die Volumenänderung unter linearen Transformationen betrachtet [10]. Man kann in diesem Zusammenhang auf lineare Transformationen in endlichdimensionalen Räumen eingehen, die unter anderem Anwendungen in den Methoden der finiten Elemente (FEM) und in der Computergraphik haben. Lineare Abbildungen sollten in den Abschnitt zur linearen Algebra aufgenommen werden. Es wird betont, dass die Gedankengänge eher heuristischen und veranschaulichenden Charakter haben und keinen exakten Beweis darstellen [11].

Viele Begriffe wie z.B. k-Bein findet man schon bei Grassmann 1844 bzw. 1866 (vgl. Sperner [12]). Den Zusammenhang zwischen Determinanten und Volumen kannte schon Lagrange (1736-1813). Kronecker (1850) und Weierstraß (1860) brachten den Begriff der Determinante einer linearen Transformation. Kronecker (1870) zeigte, dass der Determinantenrang gleich dem Rang ist.

ÜBER K-BEINE

Aus dem Schulunterricht Physik ist das Dreibein ein bekannter Begriff. Es besteht aus drei linear unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ des Anschauungsraumes. Ein n-Bein besteht aus n linear unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n$ aus dem $\Re^n$, die als Spaltenvektoren zu einer (n,n)-Matrix [K] zusammengefasst werden.

Die konvexe Hülle des n-Beins ist ein Parallelflach oder Parallelepiped. Ein zwei- bzw. dreidimensionales Parallelepiped wird als Parallelogramm bzw. Spat bezeichnet.

Bemerkung 2: Manchmal werden n-Bein, Matrix und aufgespannter Körper identifiziert. Auch hier wird nur die Matrix [K] gesondert durch Klammern bezeichnet. Sie ist erst nach Wahl einer Basis eindeutig bestimmt.

Der n-dimensionale Inhalt dieses Körpers wird mit $vol_n(K)$ bezeichnet. Speziell ist $vol_1(K)$ eine Länge, $vol_2(K)$ die Fläche und $vol_3(K)$ das Volumen.

Zwischen der Matrix und dem Volumen des Körpers gibt es einen direkten Zusammenhang, der in der bekannten Formel

$$vol_n(K) = |\, det([K])\, |$$

deutlich wird. Die Zuordnung von Matrix und Inhalt eines Körpers wird später auf rechteckige Matrizen ausgedehnt. Unter den Voraussetzungen kann das Gebiet G durch eine Vereinigung von Elementarbereichen beliebig genau angenähert werden. Als Elementarbereiche können konvexe Hüllen von n-Beinen dienen, deren Inhalt sich einfach durch die Determinante angeben lässt.

Bemerkung 3: Die Beschränkung auf Jordanmeßbare Gebiete und den Riemann'schen Integralbegriff stellt eine Einschränkung dar, die sich aber für die praktischen Probleme nicht nachteilig auswirkt. Eine Zerlegung von Gebieten in höheren Dimensionen in Elementarbereiche ist aber nicht unproblematisch, wie das Beispiel des Schwarz'schen Zylinders [8] zeigt. Darauf kann in der Ingenieur-mathematik nicht näher eingegangen werden.

Werden die Eigenwerte von [K] mit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ bezeichnet, so kann man den Inhalt des Elementarbereiches als

$$vol_n(K) = \sqrt{det([K]^T [K])} = \sqrt{det(\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle)_{i,j=1}^{n}} = \left|\prod_{i=1}^{n} \lambda_i\right|$$

schreiben. Die (n,n)-Matrix

$$G_n = [K]^T [K] = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle$$

heißt Gramsche Matrix der linear unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_n \in \Re^n$. Sie ist symmetrisch und positiv definit. Beschränkt man sich auf den $\Re^3$ und Dreibeine, so ist die obige Formel für $vol_3(K)$ das Spatprodukt. Was passiert aber, wenn man z.B. im $\Re^3$ ein Zweibein gegeben hat. Es spannt ein Parallelogramm im Raum auf. Sein Volumen (der dreidimensionale Inhalt) ist Null. Aber der zweidimensionale Inhalt (die Fläche) ist nicht Null. Es soll der allgemeine Fall betrachtet werden.

Ein *k*-Bein im $\Re^n$ besteht aus *k* linear unabhängigen Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k$ des $\Re^n$. Der *n*-dimensionale Inhalt $vol_n(K)$ der konvexen Hülle der Vektoren ist im Falle $k<n$ Null. Aber den *k*-dimensionalen Inhalt kann man berechnen. Dazu werden die Vektoren zu einer (*n*,*k*)-Matrix [*K*] zusammengefasst. Der Rang dieser Matrix ist *k*. Dann erhält man

$$vol_k(K) = \sqrt{det([K]^T [K])}$$

Bezeichnen die Zahlen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_k > 0$ die Singulärwerte von [*K*], ist der *k*-dimensionale Inhalt der konvexen Hülle *K* des *k*-Beins

$$vol_k(K) = \sqrt{det([K]^T [K])} = \sqrt{det\left(\left\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \right\rangle\right)_{i,j=1}^{k}} = \prod_{i=1}^{k} \sigma_i .$$

Auch hier tritt die Gramsche Matrix vom Typ

$$(k,k) \quad G_k = [K]^T [K] = \left\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_j} \right\rangle_{i,j=1}^{k}$$

der Vektoren $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, ..., \boldsymbol{v}_k \in \Re^n$ auf.

Beispiel: Es soll ein 2-Bein im $\Re^3$ berechnet werden. Die Fläche des durch die Vektoren $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T$ und $\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\end{bmatrix}^T$ aufgespannten Parallelogramms $K \subset \Re^3$ ist

$$vol_2(K) = \sqrt{det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\right)} = \sqrt{det\begin{pmatrix} 14 & 32 \\ 32 & 77 \end{pmatrix}} = \sqrt{54} .$$

VOLUMENÄNDERUNG DURCH LINEARE TRANSFORMATION

Der Beweis der Transformationsformel für Bereichsintegrale beginnt mit der Analyse der von linearen Transformationen implizierten Volumenänderung. Für Vektorräume *V* und *W* bezeichnet *L*(*V,W*) den Vektorraum der linearen Abbildungen $T : V \mapsto W$. Für *V*=*W* ist *L*(*V*) = *L*(*V,V*).

Satz 1: Volumenänderung bei Linearer Transformation

Sei $T \in L(\Re^n)$ und [*T*] die entsprechende (*n*,*n*)-Matrix. Dann besteht zwischen den Inhalten $vol_n(B)$ des Bereiches *B* und $vol_n(T(B))$ des Bildes *T*(*B*) die Gleichung $vol_n(T(B)) = det([T])\ vol_n(B)$.

Wenn *T* eine affine Transformation ist, gilt der Satz unverändert. Die Formel ist auch richtig im Falle *det*[*T*] = 0. Wenn *B* speziell ein Elementarbereich ist, so ist das Volumen von *B* gleich dem Betrag der Determinante der Matrix, die aus den aufspannenden Vektoren besteht. Jede lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen ist nach Wahl von Basen der Räume eine Matrix. Die Abbildung eines Vektors bedeutet die Multiplikation des Vektors mit der Matrix. Hier wird die Matrix des Elementarbereichs mit der Abbildungsmatrix multipliziert. Der obige Satz ist dann der Multiplikationssatz für Determinanten.

Wenn $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ die Eigenwerte von [*T*] bezeichnen, kann die Formel im Satz als

$$vol_n(T(B)) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i\ vol_n(B) = \sqrt{det\left([T]^T [T]\right)}\ vol_n(B)$$

geschrieben werden.

Für $T \in L(V,W)$ mit *k* = *dim*(*V*) < *dim*(*W*) = *n* ist der Satz 1 nicht verwendbar. Hat [*T*] den Rang *k*, so bezeichnen $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_k > 0$ die Singulärwerte von [*T*]. Man erhält analog zum Vorgehen bei *k*-Beinen den

Satz 2: Volumenänderung bei Linearer Transformation

Sei $T \in L(\Re^k, \Re^n)$. Dann besteht zwischen dem Inhalt $vol_k(B)$ des Bereiches $B \subset \Re^k$ und dem Inhalt $vol_k(T(B))$ die Gleichung

$$vol_k(A(B)) = \sqrt{det\left([T]^T [T]\right)}\ vol_k(B) = \prod_{i=1}^{k} \sigma_i vol_k(B) .$$

Bis hier wurden Sätze der linearen Algebra benutzt. Erst jetzt kommt etwas Analysis.

Der Beweis der Transformationsformel für Integrale folgt aus dem Satz 2 für lineare Transformationen durch Standardschlüsse. Zunächst wird auf den allgemeinen Fall eingegangen.

VOLUMENÄNDERUNG DURCH NICHTLINEARE TRANSFORMATION

Für die nicht notwendiger Weise lineare Abbildung des Bereiches $B \subset \Re^k$ auf $G = \boldsymbol{\Phi}(B) \subset \Re^n$ wird die Ableitung $\boldsymbol{\Phi}' \in \Re^{k \times n}$ von $\boldsymbol{\Phi} \in C^1(B)$ an der Stelle $\boldsymbol{u} \in B$ als lineare Abbildung aus $L(\Re^k, \Re^n)$ durch die Gleichung

$$\lim_{\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}} \frac{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\Phi}'(\boldsymbol{u})\boldsymbol{h}}{\boldsymbol{h}} = 0$$

definiert.

Wenn so ein Operator existiert, heißt $\boldsymbol{\Phi}$ differenzierbar an der Stelle $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{\Phi}'$ heißt die Ableitung von $\boldsymbol{\Phi}$ im Punkt $\boldsymbol{u} \in B$. Die Ableitung ist eindeutig bestimmt und unter den vereinbarten Voraussetzungen an $\boldsymbol{\Phi} \in C^1(B)$ ist $\boldsymbol{\Phi}'$ gleich mit der Jacobimatrix $J_{\boldsymbol{\Phi}}$, also $\boldsymbol{\Phi}' = J_{\boldsymbol{\Phi}}$.

Für eine injektive lineare oder affine Gebietstransformation ist die Transformationsmatrix selbst gleich der Jacobimatrix. Die Spaltenvektoren der Jacobimatrix sind die partiellen Ableitungen $D_j\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) \in \Re^n$ von $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$. Sie sollen für jedes $\boldsymbol{u} \in B$ linear unabhängig sein. Damit hat $\boldsymbol{\Phi}' = J_{\boldsymbol{\Phi}}$ den Rang k. Der Begriff Transformation ist im Falle $n=k$ üblich. Für $n>k$ soll er beibehalten werden. Ansonsten ist der Begriff der Parametrisierung gebräuchlich. Wenn $k=1$ ist, spricht man von Kurven, für $k=2$ von Flächen und für $k=n-1$ von Hyperflächen. In den Vorlesungen wird die Parameterdarstellung von Funktionen behandelt [13]. Für die Berechnung von Integralen genügt es, wenn eine Transformation bzw. Parametrisierung stückweise gegeben ist. Die Spaltenvektoren der Jacobimatrix spannen den Tangentialraum auf. Seine Dimension ist gleich der Dimension der Mannigfaltigkeit.

Für differenzierbare Variablentransformationen wird ihre lokale Linearität zum Beweis der Transformationsformel benutzt.

Bemerkung 4: An dieser Stelle sind mehrere Schwierigkeiten versteckt, deren Klärung größeren Aufwand erfordert. In diesem Kontext genügt die folgende heuristische Überlegung.

Wenn der Bereich B in hinreichend kleine Teilbereiche B_i zerlegt wird, gilt für $n = k$ näherungsweise

$$vol_n(\boldsymbol{\Phi}(B_i)) \approx |det(J_{\boldsymbol{\Phi}})|\, vol_n(B_i)$$

Daraus folgt für $\boldsymbol{u} \in B_j$ und $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})$ die Beziehung

$$f(\boldsymbol{x})vol_n(\boldsymbol{\Phi}(B_i)) \approx f(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}))\,|det(J_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u}))|\,vol_n(B_i)$$

Aufsummieren über die Teilbereiche liefert eine Riemannsche Summe, aus welcher im Grenzprozess die Transformationsformel (1) folgt.

Für $n>k$ ist die Jacobimatrix

$$J_{\boldsymbol{\Phi}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_i}{\partial x_j}\right)_{i=1,j=1}^{n,k}$$

nicht mehr quadratisch. Vorausgesetzt wird, dass $J_{\boldsymbol{\Phi}}$ in jedem Punkt $\mathbf{u}$ von B den vollen Rang k hat. Analog zum Vorgehen im Fall $n=k$ gilt hier wie schon bei linearen Transformationen $\Re^k \mapsto \Re^n$

$$vol_k(\boldsymbol{\Phi}(B_i)) \approx \sqrt{det\left(J_{\boldsymbol{\Phi}}{}^T J_{\boldsymbol{\Phi}}\right)}\, vol_k(B_i)$$

Mit der Bezeichnung $|G_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u})| = \sqrt{det(J_{\boldsymbol{\Phi}}^T(\boldsymbol{u})\, J_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u}))}$ gilt $f(\boldsymbol{x})vol_k(\boldsymbol{\Phi}(B_i)) \approx f(\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}))|G_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u})|\; vol_k(B_i)$.

Daraus erhält man für $n>k$ die gewünschte Verallgemeinerung der Transformationsformel:

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_B \left(f \circ \boldsymbol{\Phi}\right)(\mathbf{u})|G_{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{u})|\,d\mathbf{u}. \quad (3)$$

Sie dient zur Integration über eine k-dimensionale Mannigfaltigkeit G im n-dimensionalen Raum. Bezeichnet man mit M_i, $i=1,..., \binom{n}{k}$, die sämtlichen k-reihigen Untermatrizen von $J_{\boldsymbol{\Phi}}$ und wendet man auf die Determinante $det(J_{\boldsymbol{\Phi}}^T \cdot J_{\boldsymbol{\Phi}})$ die Formel von Cauchy-Binet

$$det(J_{\boldsymbol{\Phi}}^T(\mathbf{x})\, J_{\boldsymbol{\Phi}}(\mathbf{x})) = M_1^2 + M_2^2 + ... + M_{\binom{n}{k}}^2$$

an, so geht die Transformationsformel über in die Gleichung

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_B (f \circ \boldsymbol{\Phi})(\mathbf{u})\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + ...M_{\binom{n}{k}}^2}\,d\mathbf{u}.$$

Diesen Ausdruck findet man schon 1930 bei Courant [14].

Wenn $n=3$ und $k=2$ ist, erhält man Oberflächenintegrale, für $k=1$ ergeben sich Kurvenintegrale. Der Herleitung der folgenden Formeln kann als Übungsaufgabe gestellt werden.

Für Oberflächenintegrale im $\Re^3$ gilt unter Berücksichtigung des Vektorproduktes eine weitere Darstellung. Die Spaltenvektoren der Jacobimatrix sind die Vektoren der partiellen Ableitungen $D_1\boldsymbol{\Phi}, D_2\boldsymbol{\Phi} \in \Re^3$. Sie spannen den Tangentialraum auf. Es ist offenbar

$$|G_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u})| = \sqrt{det(J_{\boldsymbol{\Phi}}^T(\boldsymbol{u})\, J_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u}))} = |D_1\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) \times D_2\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})|$$

und damit folgt die bekannte Formel

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_B \left(f \circ \boldsymbol{\Phi}\right)(\mathbf{u})\,|D_1\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u}) \times D_2\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{u})|\,d\mathbf{u} \quad (4)$$

Außerdem erhält man direkt durch Ausrechnen

$$J_{\boldsymbol{\Phi}}^T(\boldsymbol{u})\, J_{\boldsymbol{\Phi}}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} D_1\boldsymbol{\Phi} \cdot D_1\boldsymbol{\Phi} & D_1\boldsymbol{\Phi} \cdot D_2\boldsymbol{\Phi} \\ D_1\boldsymbol{\Phi} \cdot D_2\boldsymbol{\Phi} & D_2\boldsymbol{\Phi} \cdot D_2\boldsymbol{\Phi} \end{pmatrix}$$

und daraus mit den von C.F. Gauß eingeführten Bezeichnungen

$$E = D_1\boldsymbol{\Phi} \cdot D_1\boldsymbol{\Phi},\; F = D_1\boldsymbol{\Phi} \cdot D_2\boldsymbol{\Phi},\; G = D_2\boldsymbol{\Phi} \cdot D_2\boldsymbol{\Phi}$$

die Gleichung

$$\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_B \left(f \circ \boldsymbol{\Phi}\right)(\mathbf{u})\sqrt{EG - F^2}\; d\mathbf{u}. \quad (5)$$

Wenn $f \equiv 1$ ist, ergeben sich die in den Vorlesungen besprochenen Ausdrücke für den Flächeninhalt von Flächenstücken.

Kurven im $\Re^n$ besitzen einen Parameter. Die Matrix $\mathbf{\Phi'} = J_\Phi$ besteht aus einem Spaltenvektor mit n Komponenten.

Deshalb ist $J_\Phi^T(\boldsymbol{u})J_\Phi(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{\Phi}')^T \cdot \boldsymbol{\Phi}' = |\boldsymbol{\Phi}'|^2$ und $\int_G f(\mathbf{x})d\mathbf{x} = \int_B (f \circ \boldsymbol{\Phi})(\mathbf{u})|\boldsymbol{\Phi}'|d\mathbf{u}$.

Daraus folgen für $f \equiv 1$ und n=2, 3 die bekannten Formeln für die Bogenlänge.

Es folgen Beispiele mit ergänzenden Bemerkungen:

Bogenlänge der Schraubenlinie

Es sei $B = [a,b] \subset \Re$ und $\boldsymbol{\Phi} : t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix}$ für $t \in [a,b]$.

Dabei sind die Parameter $h,r > 0$ und h heißt die Ganghöhe der Schraubenlinie. Die Voraussetzungen an den Rang von $\boldsymbol{\Phi}'$ sind erfüllt, denn es gilt $|G_\Phi(t)| = \sqrt{r^2 + h^2} \neq 0$. In diesem Fall heißt die Parametrisierung regulär. Die Bogenlänge der Schraubenlinie ist

$$L = \int_a^b \sqrt{r^2 + h^2}\,dt = (b-a)\sqrt{r^2 + h^2}$$

Bogenlänge der Zykloide

Es sei $B = [0,2\pi] \subset \Re$ und $\boldsymbol{\Phi} : t \mapsto \begin{pmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix}$ für $t \in [0,2\pi]$ Die Voraussetzungen an den Rang von $\boldsymbol{\Phi}' : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ sind an den Stellen $t = 0, \pm 2\pi, \ldots$ nicht erfüllt. Dort ist $\boldsymbol{\Phi}'(0 \pm 2\pi) = \boldsymbol{0}$. Die Parametrisierung ist nicht regulär. Das stört bei der Berechnung der Bogenlänge nicht. Es ist

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 8$$

Inhalt der Schraubenfläche

Es sei $B = \{(\rho,t) : 0 \le \rho \le r, 0 \le t \le \alpha\} \subset \Re^2$ und $\Phi : (\rho,t) \mapsto \begin{pmatrix} \rho\cos t \\ \rho\sin t \\ ht \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Dann ist

$J_\Phi(r,\theta,z) = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,t)} = \begin{pmatrix} \cos t & -\rho\sin t \\ \sin t & \rho\cos\theta \\ 0 & h \end{pmatrix}$ und die Voraussetzungen an den Rang von $\boldsymbol{\Phi}'$ sind für $h > 0$ erfüllt, denn es ist $|G_\Phi(t)| = \sqrt{\rho^2 + h^2} \neq 0$.

Der Inhalt der Schraubenfläche ist

$$I = \int_0^r \int_0^\alpha \sqrt{\rho^2 + h^2}\,dt\,d\rho = \alpha\int_0^r \sqrt{\rho^2 + h^2}\,d\rho =$$

$$\frac{\alpha}{2}\left(r\sqrt{r^2 + h^2} + h^2 ar\sinh\frac{r}{h}\right)$$

Weitere Beispiele für $k<n$ mit n=2, 3 und k=1,2 findet man in [5].

BEMERKUNGEN

- Die Formeln (4) und (5) werden oft ohne Erklärung angegeben. Wenn man die Transformationsformel (1) begründet oder einfach nur angibt, kann man genauso für die Formel (3) vorgehen. Die Gleichungen (4) und (5) kann man dann wie im Text herleiten.
- Die Teile der linearen Algebra sind unabhängig von dieser konkreten Anwendung in der Integralrechnung nützlich. Insbesondere ist die Erweiterung der Stoffabschnitte zu (endlich-dimensionalen) Vektorräumen und zu linearen Operatoren ratsam. Sie spielen in sehr vielen modernen Ingenieuraufgaben eine Rolle. Zusätzlich sind Ingenieure heute oft mit ökonomischen Aufgaben konfrontiert, die Methoden der linearen Algebra zur Grundlage haben.
- Der Grundgedanke dieser Arbeit durch mehr lineare Algebra Zeit in der Integralrechnung zu sparen, ist nur ein Teil der Wahrheit. Man kann ähnliche Überlegungen auch für andere Teile der Analysis anstellen. Beispielsweise gewinnen die Studierenden mit Hilfe der Begriffe Ähnlichkeit, Diagonalisierung und Potenzen von Matrizen Einsichten von großem Wert und gleichzeitig Verfahren zur Lösung von Systemen von Differential- und Differenzengleichungen.
- Sehr viele Aufgaben für Ingenieure erfordern nach der Diskretisierung der analytischen Gleichung die Lösung von linearen Gleichungssystemen oder Eigenwertaufgaben. Das sind klassische Themen der linearen Algebra. Sie werden durch große Dimensionierung zu schwierigen Problemen. Die passenden Methoden der höheren Mathematik gehören in die (numerische) lineare Algebra. Man findet sie nur selten in den Vorlesungen zur Ingenieurmathematik. Insofern sollte der Anteil der linearen Algebra in der Ingenieurmathematik stark erweitert werden.

REFERENZEN

1. Ingenieurausbildung im Umbruch. Empfehlungen des VDI für eine zukunftsorientierte Ingenieurqualifikation, Düsseldorf (1995).
2. Internationalisierung der Ingenieurausbildung – Die Neue Herausforderung für Hochschulen in Deutschland. Empfehlungen von VDMA und ZVEI, Frankfurt am Main (1997).
3. Berger, M. und Schwenk, A., Mathematische Grundfertigkeiten der Studienanfänger der Technischen Fachhochschule Berlin und der Schüler der Bertha-von-Suttner-OG Berlin. *Global J. Engng. Educ.*, 5, **3**, 251-258(2001).
4. Pfeiffle, H. und Nairz-Wirth, E., *Physikalische und Mathematische Kenntnisse von Naturwissenschaftlich Orientierten Studienanfängerinnen und Studienanfängern.* In: Ruprecht, R. (Hrsg.), Unique and Excellent. Ingenieurausbildung im 21. Jahrhundert. Alsbach: Leuchtturm, 176-181(2000).
5. Strauß, R., Über einen Ergänzungskurs zur Ingenieurmathematik. *Global J. Engng. Educ.*, 7, **3**, 329-335 (2003).
6. Axler, S., *Linear Algebra Done Right.* New York: Springer-Verlag (2001).
7. Körber, K.H. und Pforr, E.A., *Integralrechnung für Funktionen mit mehreren Variablen.* Leipzig: Teubner-Verlag (1990).
8. Mangoldt, H.v. und Knopp, K., E*inführung in die Höhere Mathematik, 3. Band.* Leipzig: S. Hirzel Verlag Leipzig (1965).
9. Smirnow, W.I., *Lehrgang der Höheren Mathematik, Teil 2.* Frankfurt am Main: Verlag Harry Deutsch (1990).
10. Strauß, R., Braucht man Determinanten in der Ingenieurausbildung? *Global J. Engng. Educ.*, 6, **3**, 251-257 (2002).
11. Huppert, B., *Angewandte Lineare Algebra.* Berlin: De Gruyter (1994).
12. Sperner, E., *Einführung in die Analytische Geometrie und Algebra, 1. Teil.* Göttingen (1948).
13. Schott, D., *Ingenieurmathematik mit* Matlab. Leipzig: Fachbuchverlag (2004).
14. Courant, R., *Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung zweiter Band.* Berlin (1930).

BIOGRAPHIE

Raimond Strauß ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mathematik der Universität Rostock. Seine Interessen in der Lehre gelten den Inhalten und Methoden von Mathematikvorlesungen und der Einbeziehung neuer Medien in die Ausbildung von Ingenieuren. Er hat Arbeiten zur numerischen Quadratur von singulären Integralen veröffentlicht und ist Mitautor eines Schulbuches zum Thema Computergraphik.